现代数学丛书

肖刚 著

代数曲面的纤维化

THE FIBRATIONS OF ALGEBRAIC SURFACES

XIAO GANG

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

代数曲面的纤维化

肖 刚 著



上海科学技术出版社

(沪)新登字108号

责任编辑 赵序明

现代数学丛书
代数曲面的纤维化
肖 刚 著
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷
开本850×1168 1/32 印张6.25 插页4 字数156,000
1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷
印数 1—1,600

ISBN 7-5323-2539-3/O·150
定价：5.45元

内 容 提 要

纤维化是代数曲面研究中的基本方法之一，本书详细介绍了曲面纤维化的主要性质，包括层上同调、不变量、基变换、单值、基本群等，然后以椭圆纤维化、亏格二纤维化、超椭圆纤维化、非超椭圆纤维化的顺序，讨论各种不同的纤维化。重点是奇异纤维的分类及其与纤维化整体不变量的关系。

本书供数学专业研究生作教材，并供数学研究工作者、数学专业教师参考。

Modern Mathematics Series

THE FIBRATIONS OF ALGEBRAIC SURFACES

Xiao Gang

Shanghai Scientific & Technical Publishers

The Fibrations of Algebraic Surfaces

Xiao Gang

Abstract

The fibration is one of the fundamental methods in the study of algebraic surfaces. The book begins with a detailed explanation of the main properties of surface fibrations including sheaf cohomology, invariants, base changes, monodromy, fundamental groups etc. Then different kinds of fibrations are discussed following the order, elliptic fibrations, genus two fibrations, hyperelliptic fibrations and non-hyperelliptic fibrations. The emphasis is placed on the classification of singular fibres and their relations with the global invariants of the fibrations.

This book can be used as a textbook for graduate students in math major or as a reference book for research workers as well as teachers in pure mathematics.

出版说明

从六十年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，十八位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社
1991年4月

引 言

纤维化在代数几何中占有十分重要的地位．它的意义是两方面的，一方面，我们可以把一个纤维化看成是一族代数簇，这一族代数簇中的元就是纤维化中的纤维，从而提供了研究代数簇的形变和模空间的一个途径；另一方面，一个纤维化 $f: X \to Y$ 在某种意义下也是把代数簇 X 分解成了 f 的纤维所组成的族，这就给我们研究代数簇 X 的性质提供了一个降维的途径，因为 f 的纤维具有比 X 更低的维数。这时问题的关键在于建立 f 的纤维，特别是一些特殊的纤维的性质与 X 的整体性质之间的关系。

本书的目的是讨论最低维数的纤维化 $f: X \to Y$：当 $X = S$ 为二维代数簇(代数曲面)时，这时 $Y = C$ 为一曲线，并且 f 的纤维都是曲线。我们主要是从上述的第二个角度去研究这样的纤维化，即通过 f 去研究曲面 S 的性质，特别是 S 的整体不变量和基本群等．与此同时，我们也特别注重对纤维化本身的研究，读者可以发现在曲面的性质和纤维化的性质之间有着引人注目的平行性。

我们假定读者熟悉代数几何的基本知识，包括层的上同调、射影代数曲线等。我们也要求读者了解代数曲面理论的基础内容，如相交形式、Riemann-Roch 定理、极小曲面等，但我们并不用到代数曲面的分类理论的深刻结论。所要求的这些预备知识的范围基本上不超过有关代数几何的任何一本教科书，如[H1]、[Ii]或[Sha]的内容。

我们从代数曲面的基本知识开始(第一章)，但是本书不可能也决没有意图写成一本代数曲面理论的入门读物 所以有关的这

些基本知识只是在第一节中不加证明地予以罗列，其目的是供读者回忆和参考，同时也是为了定出一些以后要用到的记号。以后的两节较详细地讨论直纹曲面和二次覆盖，它们是我们研究超椭圆纤维化的主要工具。最后用一节的篇幅介绍曲面分类理论的主要结果，但因为本书以后的内容基本上不依赖于这些分类结果，这一节的目的主要是提供一个参考，用以与纤维化曲面的对应分类相比较。

曲面纤维化的定义、基本概念、一般结果和主要的研究方法都在第二章中作了详细的叙述，这一章因而构成了本书的主要基础。从拓扑的角度出发，我们讨论了奇异纤维的对偶图、曲面的基本群与纤维化的关系以及单值。从上同调的角度，有 $f_*\omega_{S/C}$ 的基本性质（它的半正定性，即 Parshin-Arakelov 定理的证明放在最后一章中），相对典范与多重典范映射以及纤维化与基变换的关系。

从第三章开始，采用由特殊到一般的顺序，区别不同的类型对曲面的纤维化进行详细的讨论。这个顺序是：椭圆纤维化、亏格二的纤维化、超椭圆纤维化，最后是非超椭圆纤维化。这四种情形分别构成了本书后四章的内容。

椭圆纤维化的研究可以被看成是曲面纤维化研究的开始，它是由小平邦彦在本世纪 60 年代开创的。小平对椭圆纤维化中的奇异纤维给出了一个完整的分类理论，并由此出发导出了椭圆纤维化的分类以及曲面的整体性质和奇异纤维之间的关系。

小平邦彦的奇异椭圆纤维的组合分类刻划在亏格更高时立即变得极为复杂，这使得在组合的意义上直接推广小平邦彦的分类失去意义。这方面的第一个成功的尝试是堀川颖二（Horikawa）的工作，他在亏格二的情形找到了奇异纤维的一个合理的刻划，并且在此基础上得到了满足 $K^2=2p_g-4$ 或 $2p_g-3$ 的一般型曲面的一系列重要性质[Ho3]。

从 Horikawa 的这个奇异纤维的分类开始，第四章详细地研究了亏格二的纤维化。但是我们没有完全遵循 Horikawa 的表

示，而是引入了两个“奇异性指数”s_2 和 s_3，使得这个分类能更好地反映问题的本质，并为下一章在高亏格超椭圆纤维化的推广奠定了基础。

第四章还遵照 [X 2] 在 Horikawa 的奇异纤维分类理论的基础上讨论了亏格二纤维化的地理问题，以及在雅可比簇的基础上建立的不规则亏格二纤维化的完整分类。在这一章的最后一节中，详细地讨论了一类特殊的亏格二纤维化的分类及例子，它们是满足 $p_g=q=0$，且 S 为一般型曲面的情形。

运用奇异性指数的概念，可以很容易地把 Horikawa 的亏格二分类理论推广到亏格 $g>2$ 的超椭圆纤维化。这时我们得到的是一列奇异性指数 $s_2, s_3, \cdots, s_{g+2}$。第五章的第一个内容就是给出这些奇异性指数的定义，并运用它们来表示纤维化的整体不变量（定理 5.1.7）。此外，这个分类理论还可以用来确定纤维化的基本群（§5.2）。在最后的一节里构造了几个具有较高斜率的超椭圆纤维化，它们在一般型曲面的分类问题上有重要的应用。

同超椭圆的纤维化相比，人们对于非超椭圆的情形所知道的就少得多了。例 6.1.1 说明，在这种情形我们很难期望一个像定理 5.1.7 这样完美的表达式，而最多只能用一些如定理 6.1.5 这样的不等式来刻划不变量之间的关系。除了这个不等式以及有关的一些结论外，第六章还包含了一般情形的纤维化的一些重要结果，其中有小平纤维化，非局部平凡纤维化的一系列正性和有限性定理（$\deg f_*\omega_{S/C}$ 的正性，$f_*\omega_{S/C}^{\otimes n}$ 当 $n\geqslant 2$ 时的正定性，截面自交数的上下界以及截面的有限性，关于固定的底曲线和临界点集的纤维化的有限性，等等），以及几个其中的曲面满足 $c_1^2=3c_2$ 的纤维化的例子。

为了使本书尽可能地自包含，我们在最后的附录里用一定的篇幅介绍了代数曲面以外的一些预备知识：代数曲线上的局部自由层、模曲线和 Siegel 模簇以及代数曲线的基本群。

本书是从作者1988～1989年度在华东师范大学讲课稿的基础上，经增补、发展而成的。撰写过程中曾得到陈志杰、杨劲根等同

志的许多帮助，撰写期间作者得到了国家自然科学基金的资助，谨此致谢。

肖 刚
于华东师范大学

目　录

CONTENTS

第 1 章

代数曲面

作为本书的预备知识，本章的目的是供读者回忆我们以后要用到的有关代数曲面的一些主要性质。除了第一节中的曲面的基本性质和基本定义以及最后一节中简单地叙述代数曲面分类理论的基本定理外，专门辟了一节(§1.2)讨论直纹曲面(它们是曲面纤维化的最初形式)，并利用直纹曲面的性质证明了关于曲线上的局部自由层的一个重要性质(定理1.2.5)。另外还有一节(§1.3)较详细地介绍了曲面的对合和二次覆盖，因为它们是研究超椭圆纤维化的主要工具。

§1.1 代数曲面的基本性质

这一节里，我们首先简要地介绍一下有关代数曲面的基本定义和结果，供读者参考和回忆。这些结果在任何一本有关代数曲面的基础教科书中都有详细的叙述，例如[H1]的第五章，[B1]或[BPV]。

在本书中，除了特别指出的情形之外，我们所说的曲面都是在复数域$\boldsymbol{C}$上定义的光滑的射影代数曲面。用S来记这样的一个曲面。我们知道，S上的一个除子D可以写成S上有限多条代数曲线的代数和，

$$D=\sum_{i=1}^{n}k_iC_i, \tag{1.1}$$

这里k_i是整数，C_i是S上的曲线。当$n=0$时，D称为平凡除子。如果在表达式(1.1)中，所有的系数都是非负的，则称D为有效除

子。我们也用 $D_1 \geqslant D_2$ 表示 $D_1 - D_2$ 为有效除子。特别地，如果 f 是 S 上的一个有理函数，则 f 的零点(正系数)和极点(负系数)的一维部分(计重数)构成 S 上的一个除子，记作 $\mathrm{div}(f)$。如果存在一个有理函数 f 使得 $D_1 = D_2 + \mathrm{div}(f)$。则称除子 D_1 和 D_2 为线性等价的，记作 $D_1 \equiv D_2$。曲面 S 上所有除子的线性等价类关于除子的自然加法构成一个群 $\mathrm{Pic}(S)$，即 S 的 Picard 群。

另一方面，任给一个除子 D，我们可以构造 S 上的一个可逆层 $\mathcal{O}(D)$，使得 D 成为 $\mathcal{O}(D)$ 的某个截面的零点和极点所定义的除子。D 是有效除子当且仅当这个截面是整体截面，两个除子对应于同构的可逆层当且仅当它们是线性等价的。反之，任给一个可逆层 $\mathcal{L}$ 和它的一个截面 s，我们可以定义一个除子 $D = \mathrm{div}(s)$，使得 $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(D)$。因此 S 的 Picard 群也是 S 上所有可逆层的同构类关于层的张量积所构成的群。在这个对应下平凡除子所对应的是 S 的结构层 $\mathcal{O}_S$。另一个重要的可逆层是 S 上所有二阶外微分形式所构成的层，称为 S 的典范层，记为 ω_S。对应于它的一个除子称为典范除子，通常用 K_S 或 K 来表示。

对于 S 上的任意两个除子 D_1、D_2，我们可以定义一个整数 D_1D_2，称为它们的相交数。一个除子 D 和自身的相交数 DD 也称为 D 的自交数，记作 D^2。典范除子的自交数 K_S^2 (或 K^2) 是曲面的一个非常重要的数值不变量。如果对于任一除子 D 都有 $D_1D = D_2D$，则 D_1 和 D_2 称为数值等价的除子，记为 $D_1 \sim D_2$。线性等价的除子一定数值等价，但反之不成立。于是相交数是在可逆层的意义下有定义的。

更一般地，相交数的定义可推广到 $\mathrm{Pic}(S) \otimes_Z \mathbf{Q}$ 上去。$\mathrm{Pic}(S) \otimes_Z \mathbf{Q}$ 中的一个元素称为 $\mathbf{Q}$-除子。

如果 D 是一个 $\mathbf{Q}$-除子，使得对于任一有效除子 D'，都有 $DD' \geqslant 0$，则 D 称为数值正的。同样可以定义可逆层的数值正性。如果 D 是数值正的，则 $D^2 \geqslant 0$。

著名的 Riemann-Roch 定理在除子的相交数和它们的上同调之间建立了密切的联系：

Riemann-Roch 定理　设 $\mathscr{L}$ 为曲面 S 上的一个可逆层，并用 $h^i(\mathscr{L})$ 记上同调空间 $H^i(\mathscr{L})$ 的维数。则

$$\chi(\mathscr{L})=\chi(\mathscr{O}_S)+\frac{1}{2}(\mathscr{L}^2-K\mathscr{L}),$$

这里

$$\chi(\mathscr{L})=h^0(\mathscr{L})-h^1(\mathscr{L})+h^2(\mathscr{L})$$

是 $\mathscr{L}$ 的 Euler-Poincaré 特征标。

为了有效地应用 Riemann-Roch 定理，人们往往希望知道 $h^1(\mathscr{L})$ 在什么时候等于零。例如，著名的小平邦彦消没定理说，如果 $\mathscr{L}$ 是丰富的，则 $h^1(\mathscr{L}^\vee)=0$。下面的 Mumford 消没定理 [Mu2] 是对小平消没定理的一个推广：

定理 1.1.1　设 D 是曲面 S 上的一个数值正的除子，并且 $D^2>0$。则 $h^1(\mathscr{O}_S(-D))=0$。

从上同调的角度来说，我们知道 Pic(S) 自然同构于 $H^1(\mathscr{O}_S^\times)$。所以正合列

$$0\longrightarrow \mathbf{Z}\longrightarrow \mathscr{O}_S\longrightarrow \mathscr{O}_S^\times\longrightarrow 1$$

诱导上同调列

$$H^1(\mathscr{O}_S)\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Pic}(S)\xrightarrow{\beta}H^2(S,\mathbf{Z}).$$

这里 α 的象为 $\mathrm{Pic}^0(S)$，是个阿贝尔簇；β 的象即 S 的 Néron-Severi 群，记为 NS(S)，它实际上是 $H^2(S,\mathbf{Z})$ 与 $H^{1,1}(S)$ 的交。$\mathrm{Pic}^0(S)$ 中的除子都数值等价于 0，所以除子的相交诱导 NS(S) 上的一个二次形式，这就是曲面的*相交二次形式*，它与 NS(S) 上由 $H^2(S,\mathbf{Z})$ 的杯积所诱导的二次形式是一致的，因此它在 NS(S) 的自由部分上是非退化单模的。于是 NS(S) 的秩 rk(NS (S)) 就是 S 上数值无关的除子的极大个数，它称为 S 的 Picard 数，通常用 $\rho(S)$ 来表示。

用微分几何的方法可以证明，NS(S) 上的相交二次形式恰有一个正特征，$\rho(S)-1$ 个负特征。由此可以推出

代数指标定理（或称 Hodge 指标定理）　设 D、E 为曲面 S 上的两个除子，$D^2>0$，$ED=0$。则 $E^2\leqslant 0$，且 $E^2=0$ 当且仅当 E 数

值等价于零。

证明 事实上，这时E在 $NS(S)$ 中的象与正向量D的象正交，所以要么是负向量(此时 $E^2<0$)，要么在 $NS(S)$ 的挠部中，故数值等价于零。 ▌

推论 对于曲面S上的任意两个除子 D、E，$D^2\geqslant 0$，我们有

$$D^2E^2\leqslant(DE)^2,$$

且等号成立当且仅当E是D的数值倍数，即存在 $r\in\mathbf{Q}$ 使得 $E\sim rD$。

证明 我们可设 $D^2>0$。因为 $D(DE\cdot D-D^2\cdot E)=0$，代数指标定理给出

$$(DE\cdot D-D^2\cdot E)^2\leqslant 0.$$

如果等号成立，可取 $r=DE/D^2$。 ▌

曲面S有一系列重要的数值不变量。首先，我们有结构层的 Euler-Poincaré 特征标 $\chi(\mathcal{O}_S)$，它满足

$$\chi(\mathcal{O}_S)=p_g(S)-q(S)+1,$$

这里 $p_g(S)=h^2(\mathcal{O}_S)=h^0(\omega_S)$ (简记为 p_g，如果不致产生混淆)是S的几何亏格，$q(S)=h^1(\mathcal{O}_S)=h^1(\omega_S)$(简记为 q) 是S的不规则性，它们都是重要的数值不变量。此外，我们有两个陈数 c_1^2 和 c_2，这里 c_1^2 是曲面的切丛的第一陈类的自交数，因此 $c_1^2=K^2$；c_2 是切丛的第二陈类的次数，它等于曲面的拓扑 Euler-Poincaré 特征标。我们有 Noether 公式

$$12\chi(\mathcal{O}_S)=c_1^2+c_2,$$

以及

$$c_2=2-4q+2p_g+h^{1,1}\geqslant 2-4q+2p_g+\rho(S).$$

两个曲面 S_1、S_2 之间的一个有理映射 $\varphi:S_1\dashrightarrow S_2$ 是指从 S_1 的一个 Zariski 开集到 S_2 的一个态射。如果 φ 有一个有理逆映射 $\psi:S_2\dashrightarrow S_1$，则它称为一个双有理映射，这时 S_1 和 S_2 称为双有理等价的。双有理等价是曲面的一个重要的等价关系。两个双有理等价的曲面具有相同的几何亏格、不规则性和 Euler-Poincaré 特征标 χ，但陈数和 Picard 数不一定相同。

设C是曲面S上的一个有效除子. 则C是一个一维的射影概型,这时

$$\omega_C \cong \omega_S \otimes \mathcal{O}_S(C) \otimes \mathcal{O}_C,$$

因此,我们有相伴公式

$$-2\chi(\mathcal{O}_C) = K_S C + C^2. \tag{1.2}$$

特别地,当C为一条不可约的光滑既约曲线时,

$$g(C) = \frac{1}{2}(K_S C + C^2) + 1. \tag{1.3}$$

相伴公式(1.2)告诉我们,对于S上任意一条不可约的既约曲线C, 一定有$K_S C + C^2 \geqslant -2$, 并且等号成立当且仅当C同构于$\mathbf{P}^1$. 满足$K_S C + C^2 = -2$, $C^2 = -n < 0$的曲线对于曲面的研究有特殊的重要性,因此我们把这样的一条曲线叫做$(-n)$-曲线.

特别地,如果C是S上的一条(-1)-曲线,则存在一个双有理收缩态射$\rho: S \longrightarrow S'$, 它把$C$收缩成$S'$中的一个点$p$, 但诱导$S-C$和$S-p$之间的同构. 反之,如果$p$是曲面$S$上的任意一个点,存在一个爆发态射$\rho: \tilde{S} \longrightarrow S$, 它是双有理的, p在ρ下的原象是$\tilde{S}$上的一条(-1)-曲线E, 并且ρ诱导$\tilde{S}-E$和$S-p$的同构. 我们把p叫做爆发ρ的中心, E叫做ρ的例外直线. $\tilde{S}$也可以称为点p的爆发.

爆发是一类特殊的双有理映射. 下面的定理说明所有的双有理映射都可以由爆发及其逆映射组合而成:

定理 1.1.2 1) 光滑曲面的任一双有理态射都是由爆发复合而成的.

2) 设$\varphi: S_1 \dashrightarrow S_2$为光滑曲面的一个有理映射. 存在一个曲面$S$以及两个态射$\psi_1: S \longrightarrow S_1$和$\psi_2: S \longrightarrow S_2$, 其中$\psi_1$是由爆发复合而成的,使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ {}^{\psi_1}\swarrow & & \searrow^{\psi_2} \\ S_1 & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & S_2 \end{array}$$

推论 在定理1.1.2的2)中,如果φ是双有理的,则ψ_2也由

爆发复合而成。

定理 1.1.3 设 $\rho:\tilde{S}\longrightarrow S$ 是一个爆发，它的中心是 $p\in S$，例外直线是 $E\subset\tilde{S}$。我们有

1）由 $(D,n)\mapsto\rho^*D+nE$ 定义的同态 $\mathrm{Pic}(S)\oplus\mathbf{Z}\longrightarrow\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ 是同构。

2）上述同构映射诱导同构 $\mathrm{NS}(\tilde{S})\cong\mathrm{NS}(S)\oplus\mathbf{Z}\cdot[E]$，这里 $[E]$ 表示 E 在 $\mathrm{NS}(\tilde{S})$ 中的类，因此 $\rho(\tilde{S})=\rho(S)+1$。

3）对于 S 上的除子 D、D'，我们有

$$\rho^*D\cdot\rho^*D'=DD',\ E\cdot\rho^*D=0,\ K_{\tilde{S}}\cdot\rho^*D=K_SD.$$

4）$K_{\tilde{S}}\equiv\rho^*K_S+E$，$c_1^2(\tilde{S})=c_1^2(S)-1$，因此

$$c_2(\tilde{S})=c_2(S)+1.$$

爆发在曲面的一个双有理等价类中建立了一个半序关系。关于这个半序关系的一个极小元称为*极小曲面*。双有理等价于给定的曲面 S 的极小曲面也称为 S 的*极小模型*。根据爆发和 (-1)-曲线之间的关系，一个曲面 S 为极小曲面当且仅当 S 中不含 (-1)-曲线。由上述定理 1.1.2 立即得到，任一曲面 S 都有极小模型；我们可以把 S 中的 (-1)-曲线一根一根地收缩掉，而由于每收缩一次，曲面的 Picard 数都下降 1，最多经过有限多次收缩，一定可以得到一个极小曲面。

设 C 为曲面 S 上的一个有效除子，p 为 S 中的一个点。设 C 在 p 的阶为 $o_p(C)\geqslant0$。考虑以 p 为中心的爆发 $\rho:\tilde{S}\longrightarrow S$。则例外直线 E 在 ρ^*C 中的重数恰为 $o_p(C)$。于是 $\tilde{C}=\rho^*C-o_p(C)E$ 是 $\tilde{S}$ 上的这样一个除子，它在 S 中的象为 C，并且不含例外除子 E。我们把 $\tilde{C}$ 称为 C 的*严格原象*。对应地，ρ^*C 称为 C 的*完全原象*。

我们有

$$\tilde{C}E=o_p(C),\ \tilde{C}^2=C^2-o_p(C)^2,\ \tilde{C}K_{\tilde{S}}=CK_S+o_p(C),\quad(1.4)$$

$$p_a(\tilde{C})=p_a(C)-\frac{1}{2}o_p(C)(o_p(C)-1).$$

如果 C 是既约的，有 n 个不可约分支，则 $p_a(\tilde{C})\geqslant1-n$。因为

$\widetilde{C}$ 和 C 有相同的不可约分支数，由上面关于 $p_a(\widetilde{C})$ 的公式立即推得曲面中曲线的嵌入奇点解消定理：

定理 1.1.4　设 C 是曲面 S 中的一条既约曲线，则 C 的奇点可以通过从 S 出发的有限多次爆发之后被解消。

上述严格原象和完全原象的概念也可以推广到由 n 次爆发复合而成的一般双有理态射的情形。设 $\rho:\widetilde{S}\longrightarrow S$ 为一双有理态射，它分解为

$$\widetilde{S}=S_n\xrightarrow{\rho_n}S_{n-1}\xrightarrow{\rho_{n-1}}\cdots\xrightarrow{\rho_2}S_1\xrightarrow{\rho_1}S_0=S,$$

其中每个 ρ_i 都是一个爆发，其中心为 $p_i\in S_{i-1}$。我们定义 p_i 在 $\widetilde{S}$ 中的完全原象 $\mathscr{E}_i$ 为 ρ_i 的例外直线 $E_i\subset S_i$ 在 $\rho_{i+1}\circ\cdots\circ\rho_n$ 下的完全原象。E_i 在 $\widetilde{S}$ 中的严格原象的定义是明显的，仍记作 E_i。设 D 为 S 上的一个有效除子。我们用 m_i 记 D 在 S_{i-1} 中的严格原象 D_{i-1} 在点 p_i 的阶。如果 p_i 是某个 E_j 上的点 $(j<i)$ 且 $m_i>1$，我们称 p_i 为 D 的一个 m_i 阶的无限接近奇点。用 $\widetilde{D}$ 记 D 在 $\widetilde{S}$ 中的严格原象，和公式(1.4)一样，我们有

$$\mathscr{E}_i^2=K_{\widetilde{S}}\mathscr{E}_i=-1,\quad \widetilde{D}=\rho^*D-\sum_{i=1}^{n}m_i\mathscr{E}_i,\quad \widetilde{D}\mathscr{E}_i=m_i,\qquad(1.5)$$

$$\widetilde{D}^2=D^2-\sum_{i=1}^{n}m_i^2,\quad \widetilde{D}K_S=DK_{\widetilde{S}}+\sum_{i=1}^{n}m_i,$$

$$p_a(\widetilde{D})=p_a(D)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(m_i-1).$$

$\mathrm{Pic}(S)$ 中的有限阶元素构成一个子群 T，称为 S 的挠群，T 中的元称为挠层(或挠元，挠除子)。当 $q(S)=0$ 时，S 的挠群是有限群。

设 $\mathscr{L}$ 为 S 上的一个 r 阶挠层。通过 $\mathscr{L}$ 可以构造 S 的一个 r 次平展覆盖 $\theta:\widetilde{S}\longrightarrow S$，这里

$$\widetilde{S}=\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S\oplus\mathscr{L}\oplus\mathscr{L}^{\otimes 2}\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}^{\otimes r-1}).$$

最后，我们有曲面 S 的 Albanese 簇和 Albanese 映射，设 S 为一不规则性 $q>0$ 的曲面，则

$$\mathrm{Alb}(S)=H^0(S,\Omega_S^1)^*/H_1(S,\mathbf{Z})$$

为一维数为 q 的阿贝尔簇，称为 S 的 Albanese 簇；这里 $H_1(S, \mathbf{Z})$ 到 $H^0(S, \Omega_S^1)^*$ 中的嵌入 $\iota: H_1(S, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^1)^*$ 由

$$(\iota(\gamma), \omega) = \int_\gamma \omega$$

定义。取定 S 上的一个点 p_0，我们可以定义一个映射

$$\alpha: S \longrightarrow \mathrm{Alb}(S),$$

称为 S 的 Albanese 映射，如下：对于任一点 $p \in S$，设 Γ 为连接 p_0 和 p 的一条道路。则把任一 $\omega \in \Omega_S^1$ 映到 $\int_\Gamma \omega$ 的线性映射为 $H^0(S, \Omega_S^1)^*$ 中的一个元素，我们把它在 $\mathrm{Alb}(S)$ 中的象定义为 $\alpha(p)$。若 Γ' 为另一条这样的道路，则 $\Gamma\Gamma'^{-1}$ 为 $H_1(S, \mathbf{Z})$ 中的元素，所以这个定义不依赖于道路 Γ 的选取。

Albanese 映射具有下述的泛性质：若 $\beta: S \longrightarrow A$ 为 S 到某个阿贝尔簇 A 的任一态射，则存在唯一的一个态射 $\gamma: \mathrm{Alb}(S) \longrightarrow A$ 使得 $\beta = \gamma\alpha$。

§1.2 曲线上的秩二局部自由层与直纹曲面

定义 1.2.1 一个曲面 S 称为*直纹曲面*，如果存在一个态射 $f: S \longrightarrow C$，这里 C 是一条曲线，使得 f 的每条纤维都同构于 $\mathbf{P}^1$。这时 f 又称为一个*直纹*。双有理等价于直纹曲面的曲面称为*双有理直纹面*。

例如，设 C 为任一曲线，则 $\mathbf{P}^1 \times C$ 是一个直纹面，它到第二个因子的投影映射是 C 上的直纹。

引理 1.2.2 设 $f: S \longrightarrow C$ 为曲线 C 上的一个直纹曲面。S 中存在曲线 D，使得 f 诱导的映射 $\varphi: D \longrightarrow C$ 为同构。或者等价地，D 为不可约曲线，且对于 f 的每条纤维 F，$FD = 1$。

这样的曲线 D 称为 f 的一个*截面*。

证明 设 F 为 f 的任一纤维。因为 $F^2 = 0$，$K_S F = -2$，相伴公式(1.2)告诉我们 $\mathcal{O}_S(F)$ 在 $\mathrm{NS}(S)$ 中的类不是可除的，因此存在 S 上的可逆层 $\mathscr{F}$ 使得 $F\mathscr{F} = 1$，因为我们总有 $h^0(F, \mathscr{F}|_F) = 2$，

从上半连续性定理可知$f_*\mathscr{F}$为C上的一个秩为2的局部自由层，所以对C上的一个充分丰富的可逆层$\mathscr{L}$，

$$h^0(S, \mathscr{F}\otimes f^*\mathscr{L})=h^0(C, f_*\mathscr{F}\otimes\mathscr{L})>0.$$

设$\mathscr{L}$为这样的层中次数最低者，并设D为对应于$\mathscr{F}\otimes f^*\mathscr{L}$的一个有效除子。则$D$显然满足引理的条件。 ∎

设D为直纹$f:S\longrightarrow C$的一个截面，$\mathscr{E}=f_*\mathscr{O}_S(D)$。我们从引理1.2.2的证明中已经看到，$\mathscr{E}$是一个秩为2的局部自由层。容易看出，若$D'$为$f$的另一截面，$\mathscr{E}'=f_*\mathscr{O}_S(D')$，则存在$C$上的一个可逆层$\mathscr{L}$使得$\mathscr{E}'=\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$。反之，对于曲线$C$上的任一秩为2的局部自由层$\mathscr{E}$，设$S=\mathrm{Proj}(\mathscr{E})$为$\mathscr{E}$所对应的射影空间丛。则$S$为一个光滑曲面，且投影$f:S\longrightarrow C$为直纹。$\mathscr{E}$确定$S$上的一个可逆层$\mathscr{O}(1)$，使得对于$f$的任一纤维$F$，$\mathscr{O}(1)F=1$，并且$f_*\mathscr{O}(1)\cong\mathscr{E}$。这就是一条曲线$C$上的直纹曲面和$C$上秩二局部自由层之间的对应关系。

在这个对应关系下，若$f:S\longrightarrow C$为对应于局部自由层$\mathscr{E}$的一个直纹，D为f的一个截面，则D在相差一个常数因子的意义下唯一地确定了$\mathscr{E}'=f_*\mathscr{O}_S(D)$上的一个处处不为零的整体截面$s$，或者说一个同构于$\mathscr{O}_C$的饱和子层$\mathscr{F}\subset\mathscr{E}'$。设$\mathscr{E}\cong\mathscr{E}'\otimes\mathscr{L}$。则$\mathscr{F}$又确定了$\mathscr{E}$的一个滤过

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\cong\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}_2=\mathscr{E}/\mathscr{E}_1\longrightarrow 0.$$

反之，设

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}_2\longrightarrow 0$$

为$\mathscr{E}$的一个滤过。将该正合列与$\mathscr{E}_1^{-1}$作张量积，我们得到$\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}_1^{-1}$中的一个平凡的可逆饱和子层，它对应于$\mathscr{O}(1)\otimes f^*\mathscr{E}_1^{-1}$上的一个非零整体截面$s$，对应于它的有效除子$D$为$f$的一个截面。这样我们又建立了$\mathscr{E}$的滤过与$f$的截面之间的一一对应关系。

在这个对应关系下，若D和D'为S的两个不同的截面，对应于滤过

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}_2\longrightarrow 0$$

和

$$0\longrightarrow \mathscr{E}_1'\longrightarrow \mathscr{E}\longrightarrow \mathscr{E}_2'\longrightarrow 0,$$

则D和D'不相交当且仅当$\mathscr{E}_1'$到$\mathscr{E}_2$的投影(或等价地，$\mathscr{E}_1$到$\mathscr{E}_2'$的投影)是同构，或者说$\mathscr{E}\cong\mathscr{E}_1\oplus\mathscr{E}_2$。由此不难推出，$f$为平凡直纹(即$S\cong\mathbf{P}^1\times C$而$f$为第二个投影)的充要条件是$S$中存在$f$的三个两两不相交的截面。

设$f:S\longrightarrow C$为直纹，D为S上的一个除子，使得对于f的纤维F有$DF=0$。则$\mathscr{E}=f_*\mathscr{O}_S(D)$为$C$上的一个可逆层，且易见$\mathscr{O}_S(D)\cong f^*\mathscr{E}$。由此立即可以推出

$$\mathrm{Pic}(S)\cong f^*\mathrm{Pic}(C)\oplus\mathbf{Z}, \tag{1.6}$$

其中$\mathbf{Z}$由f的某个截面C_0生成。

同时，我们有$f_*\mathscr{O}_S\cong\mathscr{O}_C$，$R^1f_*\mathscr{O}_S=0$，所以对所有$i$有$H^i(S,\mathscr{O}_S)\cong H^i(C,\mathscr{O}_C)$，特别地

$$p_g(S)=0,\ q(S)=g(C),\ \chi(\mathscr{O}_S)=1-g(C).$$

引理 1.2.3 设$f:S\longrightarrow C$为一直纹，C_0、F分别为f的截面和纤维，$g=g(C)$。则

$$K_S\sim-2C_0+(2g-2+C_0^2)F.$$

特别地，$K_S^2=8-8g$。

证明 因为$K_SF=-2$，存在$n\in\mathbf{Z}$使得$K_S\sim-2C_0+nF$。再考虑K_SC_0，由相伴公式即得。 ▮

利用秩二局部自由层和直纹曲面的关系，我们可以证明一个关于局部自由层的基变换和整体截面的重要结果。首先，下面的引理是明显的。

引理 1.2.4 设C_1是对应于秩二局部自由层$\mathscr{E}$的直纹面S的一条截面，它所对应的$\mathscr{E}$的滤过是

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}_2\longrightarrow 0.$$

则$C_1^2=\deg\mathscr{E}_2-\deg\mathscr{E}_1$。

推论 秩二局部自由层$\mathscr{E}$中存在一个正次数的可逆子层的充要条件是：$\mathscr{E}$所对应的直纹面S中有一条截面C，使得$C^2<\deg\mathscr{E}$。

定理 1.2.5 设$\mathscr{E}$为曲线C上的一个秩为r的正定局部自由

层，Σ 为 C 的一个有限子集。则存在一个分枝轨迹不通过 Σ 的基变换 $\pi: C' \longrightarrow C$，使得 $\mathscr{E}$ 的拉回 $\mathscr{E}'$ 几乎处处由整体截面生成，即存在 r 个代数无关的正次数整体截面 $s_1, \cdots, s_r \in H^0(\mathscr{E}')$。

我们把分枝轨迹不通过 Σ 的基变换 $\pi: C' \longrightarrow C$ 称为 Σ-基变换。

证明 我们对 r 使用归纳法：

1) $r=1$ 情形：

这时 $\mathscr{E}$ 是一个丰富的可逆层，所以存在一个正数 n，使得 $\mathscr{E}^{\otimes n}$ 是非常丰富的。我们可以在线性系 $|\mathscr{E}^{\otimes n}|$ 中选取一个既约除子 D，并使 D 和 Σ 的交集为空集。D 对应于一个单射 $\mathscr{E}^{\otimes -n} \longrightarrow \mathscr{O}_C$，由此出发就可以在层 $\mathscr{F} = \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{E}^{\otimes -1} \oplus \mathscr{E}^{\otimes -2} \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}^{\otimes -n+1}$ 上定义一个环结构，使得 $\mathrm{Spec}(\mathscr{F})$ 成为一条代数曲线 C'，并且投影映射 $\pi: C' \longrightarrow C$ 是一个 n 次循环覆盖，它的分枝轨迹不通过 Σ。因为

$$H^0(\mathscr{E}') \simeq H^0(\pi_* \mathscr{E}') \simeq H^0(\mathscr{E}) \oplus H^0(\mathscr{O}_C) \oplus H^0(\mathscr{E}^{\otimes -1}) \oplus \cdots \oplus H^0(\mathscr{E}^{\otimes -n+2}),$$

我们可以很容易地在 $H^0(\mathscr{E}')$ 中找到一个正次数的截面，于是定理在这时成立。

2) $r=2$ 情形：

由于 1)，我们只要证明这时有一个 Σ-基变换使得 $\mathscr{E}'$ 有两个代数无关的正次数可逆子层。同时，横了一个次数足够大的 Σ-基变换后，我们可以假设 $\mathscr{E}$ 的最后斜率 $\mu_f(\mathscr{E}) > 1$。

设 $S = \mathrm{Proj}(\mathscr{E})$，并设

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}_2 \longrightarrow 0$$

为对应于 $\mathscr{E}$ 的极大滤过的正合列，C_0 为 S 中对应于这个正合列的截面。我们有 $\deg \mathscr{E}_2 > 1$，因此引理 1.2.4 指出 $C_0^2 > 2 - \deg \mathscr{E}$。由中并(Nakai)丰富性准则，$C_0 - aF$ 是 S 上的一个丰富除子，这里 $a = C_0^2 - 1$，F 是 S 的一条直纹纤维。特别地对于一个充分大的整数 n，存在一个不可约的既约光滑除子 $D \in |n(C_0 - aF)|$。我们有 $D^2 = n^2(1-a)$，并且可以设 D 到 C 的投影映射

$$\tau: D \longrightarrow C$$

的分枝轨迹和 Σ 的交是空集。设 $\pi: C' \longrightarrow C$ 是 τ 的 Galois 扩张映射，$\deg \pi = kn$。因为 π 的分枝轨迹和 τ 的分枝轨迹一致，π 也是一个 Σ-基变换。并且如果我们设 $S' = S \times_C C' \longrightarrow C'$ 是 S 的直纹的拉回，则 D 在 S' 中的原象是由 n 条截面 $C_1, \cdots, C_n$ 所组成的，这 n 条截面在 Galois 群的作用下可迁，所以它们都是数值等价的。我们有

$$C_i^2 = kn(1-a) = \deg \pi(1-a) < \deg \mathscr{E}', \ i = 1, \cdots, n,$$

这里 $\mathscr{E}' = \pi^* \mathscr{E}$，因此引理 1.2.4 的推论说明每个 C_i 都对应 $\mathscr{E}'$ 的一个正次数的可逆饱和子层 $\mathscr{E}'_i$。这些子层显然是两两代数无关的。

3）一般情形，设 $r \geqslant 3$。

我们先证明在作了适当的 Σ-基变换后，$\mathscr{E}'$ 有一个正次数可逆饱和子层。

模了一个适当次数的 Σ-基变换后，我们可设 $\mu_f(\mathscr{E})$ 是 3 的整数倍。设

$$\alpha = \operatorname{Sup}\left\{\deg \mathscr{E}'_1/\mu_f(\mathscr{E}') \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathscr{E}' \text{ 是 } \mathscr{E} \text{ 在某个 } \Sigma\text{-基变换下的拉回,} \\ \mathscr{E}'_1 \text{ 是 } \mathscr{E}' \text{ 的可逆饱和子层} \end{array}\right\}.$$

我们假定 $\alpha \leqslant 0$，来导出矛盾。模 Σ-基变换可设 $\mathscr{E}$ 中有可逆饱和子层 $\mathscr{E}_1$ 使

$$\alpha \mu_f(\mathscr{E}) - \deg \mathscr{E}_1 < \frac{1}{3} \mu_f(\mathscr{E}).$$

设 $\mathscr{E}_2$ 为 $\mathscr{E}$ 关于 $\mathscr{E}_1$ 的商层，并设 $\mathscr{L}$ 为一个次数为 $-\frac{2}{3}\mu_f(\mathscr{E})$ 的可逆层。则 $\mathscr{E}_2 \otimes \mathscr{L}$ 是秩为 $r-1$ 的正定层，故对 $\mathscr{E}_2 \otimes \mathscr{L}$ 运用归纳法假设，可设 $\mathscr{E}_2$ 中有一个可逆饱和子层 $\mathscr{E}_3$，其次数 $> \frac{2}{3}\mu_f(\mathscr{E})$。设 $\mathscr{E}_4$ 为 $\mathscr{E}_3$ 在 $\mathscr{E}$ 中的原象，我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E}_4 \longrightarrow \mathscr{E}_3 \longrightarrow 0.$$

设 $\mathscr{M}$ 为一个次数为 $-\deg \mathscr{E}_1 - \frac{1}{3}\mu_f(\mathscr{E})$ 的可逆层。则 $\mathscr{E}_4 \otimes \mathscr{M}$ 是一个正次数层，如果它不是正定的，我们得到 $\mathscr{E}_4$ 的一个可逆子层

$\mathscr{F}$，它的次数 $>-\deg\mathscr{M}>\alpha\mu_f(\mathscr{E})$。但$\mathscr{F}$也是 $\mathscr{E}$ 的一个子层，所以这和 α 的定义矛盾。如果 $\mathscr{E}_4\otimes\mathscr{M}$ 是正定的，则由 2)，我们在作了一个合适的 Σ-基变换后可以得到一个次数大于 $\alpha\mu_f(\mathscr{E}')$ 的可逆子层 $\mathscr{F}'$，同样和 α 的定义矛盾。

上面的结论使我们可以假设 $\mathscr{E}$ 有一个正次数的截面 s_1。设 $\mathscr{E}_1$ 为 s_1 在 $\mathscr{E}$ 中生成的饱和可逆子层，$\mathscr{E}_2$ 为 $\mathscr{E}$ 关于 $\mathscr{E}_1$ 的商层。因为 $\mathscr{E}_2$ 也是正定的，由归纳法假设，模 Σ-基变换可设 $\mathscr{E}_2$ 中有 $r-1$ 个代数无关的正次数整体截面 t_2，…，t_r。对于 $i=2$，…，r，设$\mathscr{F}_i$ 为 t_i 生成的 $\mathscr{E}_2$ 的饱和于层在 $\mathscr{E}$ 中的原象。由命题 A 1.21，$\mathscr{F}_i$ 是正定的秩二局部自由层，所以由 2)，存在 Σ-基变换 $\pi_i:C_i\longrightarrow C$，使得 $\pi_i^*\mathscr{F}_i$ 中有一个与 $\pi_i^*s_1$ 代数无关的正次数整体截面 s_i。现在设 $\pi:C'\longrightarrow C$ 是所有的 π_i 的共同拉回，

$$C'=C_2\times_C C_3\times_C\cdots\times_C C_r,$$

并仍用 s_i 记它在 $\mathscr{E}'=\pi^*\mathscr{E}$ 中的原象。不难看出 π 是 Σ-基变换，并且 $s_i(i=1,\cdots,r)$ 代数无关。于是定理得证。 ▌

推论　如果一个局部自由层 $\mathscr{E}$ 不是半负定的，则 $\mathscr{E}$ 在某个 Σ-基变换下的拉回有一个正次数的整体截面。

证明　对 $\mathscr{E}$ 的一个正次数子层运用定理即得。 ▌

§ 1.3　对合与二次覆盖

我们先来看看二次覆盖。由定义，两个曲面 S 和 T 之间的一个二次有限态射 $\theta:S\longrightarrow T$ 称为一个*二次覆盖*。一般地，二次覆盖的定义可以推广到 S 或 T 为奇异曲面的情形，但我们为了叙述的简便起见，只考虑光滑的情形。

设 $\theta:S\longrightarrow T$ 为一二次覆盖。则 $\mathscr{O}_S$ 为 $\mathscr{O}_T$ 在 S 的有理函数域 $K(S)$ 中的整闭包，而 $K(S)$ 是 $K(T)$ 的二次扩域。因为域的二次扩张是 Galois 扩张，我们得知 θ 是 Galois 覆盖，即存在 S 的一个对合 σ，使得 $T\cong S/\sigma$，而 θ 为投影态射。σ 同时自然地作用于层 $\theta_*\mathscr{O}_S$ 上，它是 T 上的一个秩为 2 的局部自由层。这个作用

把 $\theta_*\mathcal{O}_S$ 分解成两个特征子层的直和

$$\theta_*\mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_T \oplus \mathcal{L},$$

这里 $\mathcal{O}_T$ 和 $\mathcal{L}$ 分别对应于 σ 的特征值 $+1$ 和 -1。同时 $\mathcal{O}_S$ 上的乘法结构诱导 $\theta_*\mathcal{O}_S$ 上的一个乘法结构，后者由同态映射

$$\varphi: \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_T$$

所唯一确定。而映射 φ 一一对应于映射

$$\varphi \otimes \mathcal{L}^{\otimes -2}: \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes -2},$$

它又对应于一个整体截面 $s \in H^0(\mathcal{L}^{\otimes -2})$。设 $B = \mathrm{div}\,(s)$。B 是 T 上的一个有效除子，不难看出它恰为 θ 的分枝轨迹。

一般地，任给一个曲面 T，T 上的一个可逆层 δ，以及一个有效除子 $B \in H^0(\delta^{\otimes 2})$，我们可以如下构造一个二次覆盖：

考虑层 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_T \oplus \delta^\vee$，这里 $\delta^\vee$ 表示 δ 的对偶层。B 定义一个映射 $\delta^{\vee 2} \longrightarrow \mathcal{O}_T$，它给出了 $\mathcal{E}$ 上的一个环结构。这个环结构使我们可以考虑 $S = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{E})$，以及由 $\mathcal{O}_T$ 在 $\mathcal{E}$ 中的嵌入所给出的投影 $\theta: S \longrightarrow T$。局部计算告诉我们，$\theta$ 限制在 $T - B$ 上是一个二次平展覆盖，而 B 是 θ 的分枝轨迹。更进一步，S 是正规曲面当且仅当 B 是既约除子，S 光滑当且仅当 B 光滑既约。

由于这个原因，曲面 T 上的二次覆盖 $\theta: S \longrightarrow T$ 一一对应于 T 上的一个对 (B, δ)，这里 B 是一个光滑既约的偶除子（即 B 在 $\mathrm{Pic}(T)$ 中的象可以被 2 整除），$\delta \in \mathrm{Pic}(T)$ 是 B 的一个"平方根"：$\mathcal{O}_T(B) \cong \delta^{\otimes 2}$。$B$ 的不同平方根之间相差一个二阶挠元。特别地，当 T 是单连通曲面时，除子 B 唯一地确定了 T 上的二次覆盖。我们称 (B, δ) 为 T 上的一组二次覆盖数据。

我们可以很容易地通过 T 的不变量和 δ 的相交数算出 S 的不变量。事实上，我们知道 $\omega_S \cong \theta^*(\omega_T \otimes \delta)$，并且对于 T 上的任意两个除子 D_1、D_2，我们有 $\theta^*D_1 \cdot \theta^*D_2 = 2D_1D_2$，所以

$$K_S^2 = 2(K_T + \delta)^2 = 2K_T^2 + 4K_T\delta + 2\delta^2. \qquad (1.7)$$

另一方面，对 S 上的任一可逆层 $\mathcal{L}'$，我们有

$$h^i(\mathcal{L}') = h^i(\theta_*\mathcal{L}');$$

当 $\mathscr{L}'$ 是 T 上的某个可逆层 $\mathscr{L}$ 的原象时，我们从中推出

$$h^i(\theta^*\mathscr{L}) = h^i(\mathscr{L}\oplus(\mathscr{L}\otimes\delta^\vee)) = h^i(\mathscr{L}) + h^i(\mathscr{L}\otimes\delta^\vee).$$

特别将 $\mathscr{L}$ 用 $\mathscr{O}_T$ 代入，就得到

$$p_g(S) = p_g(T) + h^0(K_T+\delta), \tag{1.8}$$

$$q(S) = q(T) + h^1(K_T+\delta), \tag{1.9}$$

$$\chi(\mathscr{O}_S) = \chi(\mathscr{O}_T) + \chi(K_T+\delta) = 2\chi(\mathscr{O}_T) + \frac{1}{2}(\delta^2 + K_T\delta). \tag{1.10}$$

这些公式说明，T 上的二次覆盖曲面 S 的数值不变量是由二次覆盖数据的不变量所决定的。

我们经常要遇到除子 B 既约但不光滑的情形。下面的引理说明二次覆盖和偶除子的关系可以很容易地推广到奇异除子的情形。

引理 1.3.1　设 T 是一个曲面，B 是 T 上的一个既约偶除子，$\delta\in\mathrm{Pic}(T)$ 是 B 的一个平方根。则存在唯一的一个双有理态射 $\rho:\tilde{T}\longrightarrow T$ 以及 $\tilde{T}$ 上的一个光滑偶除子 $\tilde{B}$ 和 $\tilde{\delta}\in\mathrm{Pic}(\tilde{T})$ 使得：

1) $B=\rho(\tilde{B})$，$\delta=\rho(\tilde{\delta})$（这里 $\delta=\rho(\tilde{\delta})$ 是指给定一个对应于 $\tilde{\delta}$ 的除子 $\tilde{D}$，存在一个对应于 δ 的除子 D 使得 $D=\rho(\tilde{D})$）。

2) $(\tilde{B},\tilde{\delta})$ 是 $\tilde{T}$ 上的二次覆盖数据。

3) $\tilde{T}$ 是在上述意义下极小的：如果 $\rho':T'\longrightarrow T$ 和 (B',δ') 是另一个满足条件 1) 和 2) 的双有理态射，则存在 $\alpha:T'\longrightarrow\tilde{T}$ 使得 $\rho'=\rho\circ\alpha$，并且 $\tilde{B}=\alpha(B')$，$\tilde{\delta}=\alpha(\delta')$。

证明　首先注意这样一个事实：设 $\rho_1:T_1\longrightarrow T$ 是一个爆发。则在 T_1 上存在唯一的一对 (B_1,δ_1) 使得 $B=\rho_1(B_1)$，$\delta=\rho_1(\delta_1)$，δ_1 是 B_1 的平方根，并且 B_1 是一个既约的有效偶除子：实际上，设 p 为 ρ_1 的中心，E 为例外直线，$m=o_p(B)$ 为 B 在 p 的阶。如果 m 是偶数，则 $B_1=\rho_1^*(B)-mE$ 为 B 的严格原象，

$$\delta_1=\rho_1^*(\delta)-\frac{1}{2}mE;$$

否则，

$$B_1=\rho_1^*(B)-(m-1)E,$$

$$\delta_1=\rho_1^*(\delta)-\frac{1}{2}(m-1)E.$$

我们把(B_1,δ_1)称为(B,δ)在ρ_1下的既约偶原象。

归纳地，我们可以定义对(B,δ)在任一双有理态射$\rho:\tilde{T}\longrightarrow T$下的既约偶原象$(\tilde{B},\tilde{\delta})$。如果$\rho_1:T_1\longrightarrow T$和$\rho_2:T_2\longrightarrow T_1$是两个双有理态射，$(B,\delta)$是$T$上的一个对，$(B_1,\delta_1)$是$(B,\delta)$在$\rho_1$下的既约偶原象，$(B_2,\delta_2)$是$(B_1,\delta_1)$在$\rho_2$下的既约偶原象，则$(B_2,\delta_2)$是$(B,\delta)$在$\rho_1\circ\rho_1$下的既约偶原象。我们这样构造$\rho$：先设$\rho_1:T_1\longrightarrow T$为$B$的所有奇点（含无限接近奇点）的爆发的复合，$(B_1,\delta_1)$是$(B,\delta)$的既约偶原象。因为$B$在$\rho_1$下的严格原象是光滑的，$B_1$至多只有二重奇点。现在设$\rho_2:\tilde{T}\longrightarrow T_1$为$B_1$的所有奇点（含无限接近奇点）的爆发的复合，$(\tilde{B},\tilde{\delta})$为$(B_1,\delta_1)$在$\rho_2$下的既约偶原象。因为$B_1$的奇点都是二阶的，$\tilde{B}$就是$B_1$在$\rho_2$下的严格原象，所以是光滑的。于是$\rho=\rho_1\circ\rho_2$是我们所要的一个双有理态射。

现在我们证明ρ的极小性，从而立即可以导出ρ的唯一性，设$\rho':T'\longrightarrow T$为另一双有现态射使既约偶原象$(B',\delta')$中$B'$为光滑。设$\rho_1:T_1\longrightarrow T$为$\rho$和$\rho'$在$T$上的推出。

$$\begin{array}{ccc} & T' & \\ & \swarrow & \downarrow \rho' \\ & T_1 \ \rho_1 & \\ \rho_2 \nearrow & & \searrow \\ \tilde{T} & \xrightarrow{\rho} & T \end{array}$$

如果ρ_2不是同构，可设组成ρ_2的一列爆发为

$$\rho_1',\cdots,\rho_n':\rho_1=\rho_1'\circ\cdots\circ\rho_n',$$

并设ρ_1'的中心为$p_1\in T_1$。由假定，p_1在T'中的完全原象仍为一个点。但由ρ的建造，p_1是B在T_1中的既约偶原象B_1的奇点，所以p_1在T'中的原象是B'的奇点，导致矛盾。▮

我们称引理1.3.1中的态射$\rho:\tilde{T}\longrightarrow T$为$B$的奇点的极小偶解消。设$\rho=\rho_1\circ\cdots\circ\rho_n$为$\rho$到爆发的分解，并设$m_i$为$B$的既约偶原象在$\rho_i$的中心的阶（因此$m_i\geqslant 2$）。定义

$$k_i=\begin{cases}\frac{1}{2}m_i, & m_i\text{ 为偶数;}\\ \frac{1}{2}(m_i-1), & m_i\text{ 为奇数.}\end{cases}$$

我们总有 $k_i\geq 1$。于是若 $\tilde{\theta}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{T}$ 为 $(\tilde{B},\tilde{\delta})$ 对应的二次覆盖，光滑情形二次覆盖的公式(1.7)～(1.10)以及爆发公式(1.5)立即得出

$$\begin{aligned}&\tilde{\delta}\equiv\rho^*\delta-\sum_{i=1}^n k_i\mathscr{E}_i,\quad \tilde{B}\equiv\rho^*B-2\sum_{i=1}^n k_i\mathscr{E}_i,\\ &K_{\tilde{S}}\equiv\tilde{\theta}^*\Big[\rho^*(K_T+\delta)-\sum_{i=1}^n(k-1)\mathscr{E}_i\Big],\\ &K_{\tilde{S}}^2=2(K_T+\delta)^2-2\sum_{i=1}^n(k_i-1)^2,\\ &\chi(\mathscr{O}_{\tilde{S}})=2\chi(\mathscr{O}_T)+\frac{1}{2}(\delta^2+K_T\delta)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n k_i(k_i-1),\end{aligned}\tag{1.11}$$

这里 $\mathscr{E}_i$ 为 ρ_i 的中心在 $\tilde{T}$ 中的完全原象。从中看出分枝轨迹 B 上的奇点可以给予二次覆盖曲面 $\tilde{S}$ 以一定的"修正"。

剩下的问题是，我们的解消 ρ 可能在曲面 $\tilde{S}$ 上引入(－1)-曲线。$\tilde{S}$ 上的(－1)-曲线 E 是由 ρ 引入的，如果 E 在 T 中的象是一个点。这样的一条曲线一定是上述某个 ρ_i 的例外直线 E_i 在 $\tilde{S}$ 中的严格原象，并且由除子与二次覆盖的关系式，这时 E_i 一定是含于 $\tilde{B}$ 中的一条 (－2)-曲线。从中很容易推出 E_i 上恰有一个点 $p_j(j>i)$，使得 B 的严格原象在 p_i 和 p_j 上的阶都是同一个奇数 $2k+1(k\geq 1)$，换句话说，B 在点 p_i 有一个相切 $2k+1$ 阶奇点（即所谓的 $(2k+1\longrightarrow 2k+1)$ 型奇点），如图 1.1 所示。

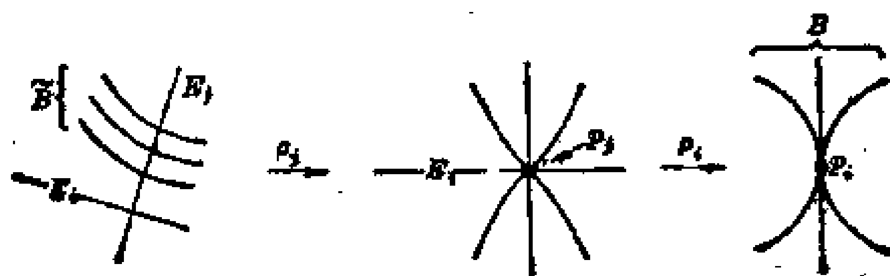


图 1.1 (3→3)型奇点

设 l 为 B 上相切奇数阶奇点的个数（当然记入无限接近奇点），$\phi:\tilde{S}\longrightarrow\hat{S}$ 为收缩所有由 ρ 引入的 (-1)-曲线的映射。容易看出，$\hat{S}$ 实际上就是 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T\oplus\delta)$ 的极小非奇异化。因此稍微忽略一点语言的严格性，我们称 $\hat{S}\longrightarrow T$ 为对应于对 (B,δ) 的二次覆盖，(B,δ)则称为一组奇异的*二次覆盖数据*。显然有

$$\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}})=\chi(\mathcal{O}_{S}),\ K_{\hat{S}}^2=K_S^2+l. \tag{1.12}$$

一般地，对于曲面 T 上一个既约偶除子 B 的一个奇点 p，我们可以定义关于 p 的一个 Persson 向量 (x_p,y_p)，这里 x_p 和 y_p 分别是奇点 p 的极小偶解消对 $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ 和 $K_{\tilde{S}}^2$ 所带来的修正值，也就是说，对于一组奇异的二次覆盖数据(B,δ)，它们给出的$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ 和 $K_{\tilde{S}}^2$ 分别是假设 B 为光滑除子时所得到的 $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ 和 $K_{\tilde{S}}^2$ 加上关于 B 的所有奇点的 Persson 向量的相应分量的和。

根据公式 (1.10) 与 (1.11)，一个二重点的 Persson 向量为 $(0,0)$，所以二重奇点对于二次覆盖的数值不变量是没有影响的。一个$(2k+1\to2k+1)$型奇点的 Persson 向量为 $-(k^2,(2k+1)^2)$，而一个 $2k$ 重奇点的 Persson 向量为

$$-\left(\frac{1}{2}k(k-1),\ 2(k-1)^2\right).$$

B 的一个奇数 $2k+1$ 阶奇点如果不是包含在一个$(2k+1\to2k+1)$型奇点之中，则它对于极小偶解消的意义相当于一个 $2k$ 阶的奇点加上在这个奇点的爆发的例外直线上的奇点，因为这条例外直线在既约偶原象中。例如一个不相切的通常三重点相当于 4 个二重点，所以对二次覆盖的数值不变量也没有影响。

我们把 Persson 向量为$(0,0)$的奇点称为*可忽略奇点*。它们是满足 $k_i=1$，且不含于 $(3\to3)$ 型奇点中的点。无限接近于可忽略奇点的点也是可忽略的。反之，Persson 向量不为零的奇点称为*不可忽略的*。不难证明，可忽略奇点的极小偶解消所导致的例外曲线在 S 中的原象都是(-2)-曲线。即分枝轨迹中的可忽略奇点给二次覆盖曲面所带来奇点的是有理二重点。

我们也可以从对合的角度来研究二次覆盖。设 σ 是曲面 S 的

一个对合。则商 $T'=S/\sigma$ 是一个不一定光滑的曲面，但 T' 的奇点一定包含在 σ 的不动点的象集合中。设 p 是 σ 的一个不动点。则我们有 $\langle\sigma\rangle$ 在 p 的切空间 $T_p(S)\cong\mathbf{C}^2$ 上的一个线性表示。这个表示是可对角化的，有两个可能为 ±1 的特征值。这对特征值的可能性只有两种：$\{1,-1\}$ 或 $\{-1,-1\}$。在第一种情形，p 是 σ 的不动点集合中的某个一维轨迹上的一个光滑点，这时 p 在 T' 中的象是个光滑点；第二种情形，p 是 σ 的一个孤立不动点，这时 p 的象是 T' 的一个有理二重奇点。所以 T' 为光滑曲面当且仅当 σ 没有孤立不动点。

设 $\tilde{p}:\tilde{S}\longrightarrow S$ 为 σ 的所有孤立不动点的爆发的复合。由于爆发的泛性质，σ 诱导 $\tilde{S}$ 上的一个对合 $\tilde{\sigma}$，这时易见 $\tilde{p}$ 的例外直线上的点都是 $\tilde{\sigma}$ 的不动点，因此 $\tilde{\sigma}$ 不再有孤立不动点，所以投影

$$\theta:\tilde{S}\longrightarrow T=\tilde{S}/\tilde{\sigma}$$

是一个二次覆盖，称为由 σ 诱导的二次覆盖。

§1.4 代数曲面的双有理分类

在本节中，我们不加证明地概要介绍一下曲面的双有理分类理论的基本结果，主要是为了供读者回忆以及与后面曲面纤维化的分类结果加以对照。这方面的详细内容可以参考例如 [B1] 或 [BPV]。

定义 1.4.1 设 S 为一曲面。则直和 $R=\bigoplus_{i=0}^{\infty}H^0(S,\omega_S^{\otimes i})$ 为一分次环，它对应的射影簇 $X=\mathrm{Proj}(R)$ 称为 S 的典范模型，其维数 $\dim(X)$ 为 S 的小平维数，记作 $\kappa(S)$。当 $R\cong\mathbf{C}$ 时，X 为空集，这时我们定义 $\kappa(S)=-\infty$。

$\kappa(S)\geqslant0$ 当且仅当对于某个 $i>0$，$H^0(S,\omega_S^{\otimes i})\neq0$。更一般地，定义函数 $f:\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{Z}$ 为 $f(n)=h^0(S,\omega_S^{\otimes n})$，则存在正整数 a 使得 $f(an)$ 为 n 的一个多项式函数，该多项式的次数即为 $\kappa(S)$（当 $f(n)$ 不恒为零时，否则，$\kappa(S)=-\infty$）。

因为 $H^0(S, \omega_S^{\otimes 4})$ 是双有理不变量，双有理等价的曲面具有相同的典范模型和小平维数。进一步地，我们用 $p_n(S)$ 来记维数 $h^0(S, \omega_S^{\otimes n})$，这些数都是 S 的双有理不变量，称为 S 的重亏格。$H^0(S, \omega_S^{\otimes n})$ 定义的映射 $\Phi_n: S \dashrightarrow \mathbf{P}^{p_n-1}$ 称为 S 的 n-典范映射。

曲面的分类主要是对曲面的双有理等价类进行分类，或者说是对双有理等价类中的代表曲面极小曲面进行分类，因为直纹曲面的性质我们已经知道得很详细了（见 §1.2），而且我们有下面的定理。

定理 1.4.2 如果 S 不是双有理直纹曲面，则 S 的双有理等价类中存在唯一的一个极小模型。

极小模型的唯一性使我们在分类中不仅可以利用曲面的双有理不变量如 p_g，q，κ，也可以讨论并非双有理不变的陈数 c_1^2，c_2 等。

下面的定理概括了在小平维数的意义下，曲面双有理分类的主要结果。

定理 1.4.3 设 S 为一极小曲面。我们有 $\kappa(S) \leqslant 2$，因此必为下列情形之一：

1) $\kappa(S) = -\infty$：这时 S 要么是射影平面 $\mathbf{P}^2$（因此 $p_g = q = 0$，$K^2 = 9$），要么是某条曲线 C 上的直纹曲面（因此

$$p_g = 0,\ q = g(C),\ K^2 = 8(1 - g(C)) = 8\chi(\mathcal{O}_S)).$$

曲面 S 属于这种情形当且仅当 $p_{12}(S) = 0$。

2) $\kappa(S) = 0$：这时我们有 $K^2 = 0$，且 S 为下列四种曲面之一：

a) K3 曲面：由定义，这是满足 $K \equiv 0$，且为拓扑单连通的曲面。因此 $p_g = 1$，$q = 0$。

b) Enriques 曲面：$p_g = q = 0$，$2K \equiv 0$。

c) 阿贝尔曲面，即 S 同时为一阿贝尔簇。这时

$$p_g = 1,\ q = 2,\ K \equiv 0.$$

d) $p_g = 0$，$q = 1$：S 为"双椭圆曲面"，即存在两条椭圆曲线 E、F 以及同时作用于 E 和 F 的一个有限群 G，G 在 E 上

的作用为平移，在F上的作用使F/G为有理曲线，使得

$$S=E\times F/G.$$

3)　$\kappa(S)=1$；在这种情形$K^2=0$，$\chi(\mathcal{O}_S)\geqslant 0$，并且存在一个态射$f:S\longrightarrow C$，这里$C$是一条曲线，$f$的几乎所有纤维都是椭圆曲线(即$S$为一个椭圆曲面；我们在第三章中还要详细讨论椭圆曲面)。

4)　$\kappa(S)=2$；这时S称为**一般型曲面**，这种情形当且仅当对于任一$n\geqslant 5$，S的n-典范映射是一个双有理态射。我们有

$$\chi(\mathcal{O}_S)>0,\ K^2>0,\ 2\chi(\mathcal{O}_S)-6\leqslant K^2\leqslant 9\chi(\mathcal{O}_S)$$

(Noether不等式和宫冈-丘不等式)。

在某种意义下说，绝大多数的曲面都是一般型曲面。在这种情形我们有以下定理。

定理 1.4.4(Gieseker，[Gi])　设x、y为两个整数。则所有满足$\chi(\mathcal{O}_S)=x$，$K^2=y$的一般型曲面构成的模空间是一个拟射影代数簇。

第 2 章

曲面的纤维化

曲面纤维化 $f:S\to C$ 的研究有一系列行之有效的方法。除了前一章中所提到的代数曲面的性质之外，最重要的恐怕就是f的相对典范层$\omega_{S/C}$及其正象$f_*\omega_{S/C}$了。它们可以用来定义纤维化的一系列数值不变量，我们在§2.4中可以看到这些不变量和代数曲面的不变量之间有着十分明显的对应关系。在§2.4中还将证明有关$\omega_{S/C}$和$f_*\omega_{S/C}$的一系列非负性和正性,这些性质对于纤维化的分类有着关键的意义。

研究纤维化的另一个重要工具是(有限)基变换。基变换按它们与相对不变量的关系可以分为不变的与非不变的，两者对于纤维化的很多重要性质的证明都是必不可少的。另外，不变基变换和建立在非不变基变换上引入的纤维扭曲概念（定义 2.6.11 和 2.6.12)可以用来证明很多纤维化和曲面的存在性，见命题4.2.6、定理 4.3.5 和定理 6.4.2。

曲面的基本群计算是纤维化的一个重要用途。对应于纤维化f，$\pi_1(S)$中有一个正规子群$\mathscr{V}_f$，称为关于f的垂直部分，它的商群只与底曲线C和f的多重纤维有关，因此是十分清楚的。于是只要弄清$\mathscr{V}_f$，$\pi_1(S)$就清楚了。我们在§2.7中建立纤维化和基本群之间关系的理论基础，在以后的几章中叙述具体的计算。

在本章的最后一节中，我们建立一个比 Picard-Lefschetz 意义更广的一般单值概念，并在此基础上定义一个新的单值，等模单值。

§2.1 定义与基本性质

我们先给出纤维化的定义。

定义 2.1.1 设S为一个(光滑射影)曲面。S的一个*纤维化*是指一个态射$f:S\to C$，这里C是一条光滑曲线，f是一个满射，并且它的所有纤维都是连通的。根据 Bertini 定理，除了有限多条纤维之外，f的纤维都是光滑既约曲线。我们把不光滑或非既约的纤维都称为*奇异纤维*，因此由定义，*光滑纤维*是既约的。如果f的所有纤维都是光滑纤维，则f称为*光滑纤维化*。

如果F是f的一条奇异纤维，$f(F)$也称为f的一个*临界点*。

设F是f的一条*一般纤维*。通常我们只用到F是光滑既约曲线这一性质，但严格地说，F应当是这样一条纤维，它不具有任何只有f的有限多条纤维才具有的性质。我们把F的亏格叫做*纤维化f的亏格*，用g来表示，它不依赖于F的选取。C称为f的*底曲线*。设K为S的一个典范除子，则有$KF=2g-2$，$F^2=0$。设B为S中的一条不可约曲线。则f诱导投影$\beta:B\to C$。如果β的象是一个点，则B含在f的一条纤维中，我们称B为一条*垂直曲线*。反之，如果β是同构，B称为f的一个*截面*。

设C'为C中f的非临界点全体构成的开集。f诱导一个态射$\mu':C'\to\mathscr{M}_g$，使得对于任一$p\in C'$，纤维$f^{-1}(p)$同构于$\mu'(p)$所代表的曲线。μ'可以唯一地拓展到一个态射$\mu:C\to\overline{\mathscr{M}}_g$，这里$\overline{\mathscr{M}}_g$是亏格$g$的稳定曲线的模空间。$\mu$称为$f$的*模映射*。

$g=0$的纤维化称为*直纹*，我们在§1.2中已经遇到过。对直纹曲面的研究是代数曲面理论的基本内容，不属本书的范围，所以我们一般假定$g\geqslant 1$。$g=1$的纤维化称为*椭圆纤维化*，因为这时一般纤维都是椭圆曲线。同样，$g=2$的纤维化称为*亏格二的纤维化*，面如果f的一般纤维都是超椭圆曲线，则f称为*超椭圆纤维化*。

纤维化的例子是很容易构造的。设S'为任一曲面，Λ'为S'

上的一个线束(即射影维数为 1 的线性系)。一般地，我们可以把 Λ' 取为 S' 上任一射影维数 $\geqslant 1$ 的一个线性系的某个一维子空间。爆发 Λ' 的所有基点，我们得到一个曲面 S，其中 Λ' 的严格原象 Λ是一个没有基点的线束，故它定义了一个态射 $\Phi_\Lambda: S\to \boldsymbol{P}^1$。然后存在一条曲线 C，使得

$$S \xrightarrow{f} C \xrightarrow{a} \boldsymbol{P}^1$$

为 Φ_Λ 的 Stein 分解，其中 $f: S\longrightarrow C$ 具有连通纤维，所以是一个纤维化，我们称它为由 Λ' 决定的纤维化。

更直接的例子是两条曲线的纤维积：设 C_1、C_2 为两条曲线，则 $S=C_1\times C_2$ 的两个投影映射都是纤维化。我们把这样的纤维化称为平凡纤维化。

引理 2.1.2 设 F 为某个纤维化 $f: S\longrightarrow C$ 的一条纤维。则 F 的法层 $\mathcal{O}_F(F)$ 是平凡的。

证明 设 $p=f(F)$，则 p 看成 C 上的除子线性等价于某一个(不一定有效的)除子 D，它的支撑集不含 p。设 $E=f^*D$。则 $\mathcal{O}_F(F)\cong\mathcal{O}_F(E)\cong\mathcal{O}_F$。 ▌

引理 2.1.3(Zariski 引理) 设 $F=\sum n_i\Gamma_i$ 为某个纤维化的一条纤维，其中 Γ_i 为F的不可约分支，$n_i>0$。则：

1) 对所有 i，$\Gamma_iF=0$；

2) 若 $D=\sum m_i\Gamma_i$，$m_i\in\boldsymbol{Z}$，是任一除子，则 $D^2\leqslant 0$，且$D^2=0$ 当且仅当 D是F的有理倍数：存在 $r\in\boldsymbol{Q}$ 使得 $D=rF$。

证明 1) 设 F' 为另一条纤维，则 Γ_i 与 F' 没有公共点，故 $F\Gamma_i=F'\Gamma_i=0$。

2) 假定 $D^2>0$，则代数指标定理和 $FD=0$ 给出 $F^2<0$，因为F显然不是数值等价于零的，这与 $F^2=0$ 矛盾。所以 $D^2\leqslant 0$。

现设 $D^2=0$，并设 r 为使得 $D+rF$ 为有效 $\boldsymbol{Q}$-除子的最小的有理数。这时至少有一个F的不可约分支不含在 $D+rF$ 中。若 D不是F的倍数，则 $D+rF$ 不是平凡除子。因此一定有一个不可约分支 Γ，它不在 $D+rF$ 中，但与 $D+rF$ 相交。于是

$$\Gamma(D+rF)=\Gamma D>0,$$

进而存在一个充分大的正数N使$(ND+\Gamma)^2>0$，导致矛盾。 ▮

用相交二次型的语言，Zariski 引理的意思是说，一条纤维的所有不可约分支的类在曲面的 Néron-Severi 群中生成的子型是半负定的。

用 Zariski 引理可以推出关于 S 的 Picard 数的一个估计。

定义 2.1.4　设F是某个纤维化的一条纤维，我们用 $l(F)$ 来表示F的不可约分支的个数。

定理 2.1.5　设 $f:S\longrightarrow C$ 为一个纤维化。则

$$\rho(S)\geqslant 2+\sum_{F\text{ 可约纤维}}(l(F)-1).$$

证明　设 $F_1, \cdots, F_k$ 为 f 的所有可约纤维，对每个 i 设 $\Gamma_{i,1},\cdots,\Gamma_{i,l(F_i)}$ 为 F_i 的不可约分支集合。再设 H 为 S 上的一个丰富除子，F 为 f 的一条一般纤维。则 H、F 和所有的 $\Gamma_{i,j}$ [这里 $j<l(F_i)$] 是数值无关的。

事实上，假定

$$D=aH+bF+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l(F_i)-1}c_{i,j}\Gamma_{i,j}\sim 0,$$

这里 $a, b, c_{i,j}\in\mathbf{Z}$，是一个数值关系。由 $DF=0$ 可得 $a=0$。然后由于

$$D^2=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l(F_i)-1}c_{i,j}\Gamma_{i,j}\right)^2=0,$$

对每个 F_i 运用 Zariski 引理可知所有的 $c_{i,j}$ 都为零。最后由 $DH=0$, $FH>0$ 得 $b=0$。 ▮

曲面双有理等价的概念也可以推广到纤维化的情形：两个纤维化 $f:S\to C$ 和 $f':S'\to C$ 是*双有理等价的*，如果存在一个双有理映射 $\varphi:S\dashrightarrow S'$ 使得下面的图交换：

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & S' \\ & f\searrow \quad \swarrow f' & \\ & C & \end{array}$$

定义 2.1.6　纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 称为*相对极小的*，或者说 S

是关于 f 相对极小的，如果 S 中没有垂直的 (-1)-曲线。双有理等价于给定的纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的一个相对极小纤维化称为 f 的一个相对极小模型。我们同样可以论述 f 的一条纤维 F 的相对极小模型。

极小曲面是关于任意纤维化相对极小的。反之，若 C 不是有理曲线，则 S 相对极小当且仅当它极小。

引理 2.1.7 设 F 为亏格 $g\geqslant 1$ 的相对极小纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的一条纤维，Γ 为 F 的一个不可约分支。则 $K_S\Gamma\geqslant 0$，并且等号成立当且仅当 Γ 为 (-2)-曲线。

证明 因为 $K_S\Gamma+\Gamma^2\geqslant -2$，$\Gamma^2\leqslant 0$，$\Gamma$ 不是 (-1)-曲线，且 $\Gamma^2=0$，$K_S\Gamma=-2$ 导致 $g=0$。 ▌

定理 2.1.8 每个纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 都有相对极小模型。当 f 的亏格 $g\geqslant 1$ 时，相对极小模型是唯一的。(对比定理 1.4.2)

证明 相对极小模型的存在性是很容易看出的：f 只有有限多条奇异纤维，而在一条奇异纤维中只有有限多个不可约分支。含于纤维中的 (-1)-曲线一定是这些不可约分支中的一个，而每收缩一次，奇异纤维中的不可约分支的总个数就减少 1，所以在有限次收缩后不会再有含于纤维中的 (-1)-曲线。

为证唯一性，设 $f_1:S_1\longrightarrow C$ 和 $f_2:S_2\longrightarrow C$ 是 f 的两个不同的相对极小模型。根据定理 1.1.2，S_1 和 S_2 有一个共同的支配曲面 S'：

$$
\begin{array}{ccc}
 & S' & \\
{}^{\rho_1}\swarrow & & \searrow^{\rho_2} \\
S_1 & \dashrightarrow & S_2 \\
{}_{f_1}\searrow & & \swarrow_{f_2} \\
 & C &
\end{array}
$$

我们可以假定 S' 是在上述意义下极小的。由定理 1.1.2 的 1)，ρ_1 是由爆发复合成的。设 $\rho':S'\longrightarrow \hat{S}$ 是其中的最后一个爆发，对应的例外直线是 $E\subset S'$。因为 E 在 S_1 中的象是一个点，所以它含在诱导纤维化 $f':S'\longrightarrow C$ 的一条纤维 F' 中。我们把 F' 在 S_1 和 S_2 中的象纤维分别记为 F_1 和 F_2。

E 是 S' 中的一条(-1)-曲线。由 S' 的极小性假设和爆发的基本性质，E 在 S_2 中的象也是一条曲线 E_2。爆发公式 (1.4) 告诉我们 $K_{S_2}E_2 \leqslant K_{S'}E < 0$。但 S_2 的相对极小性说明 E_2 不能是(-1)-曲线，所以 $E_2^2 \geqslant 0$。现在 Zariski 引理表明 F_2 是 E_2 的整数倍，所以 $KF = KF_2 < 0$，其中 F 是 f_2 的一条一般纤维，于是 $g(F) = 0$，与定理的假设矛盾。 ▌

定义 2.1.9 设 F 为纤维化 $f: S \longrightarrow C$ 的一条纤维，并设 n 为使得 $\frac{1}{n}F$ 为整除子的最大的正整数。如果 $n>1$，F 称为一条*多重纤维*，n 为 F 的重数。

任一纤维 F 为多重纤维当且仅当 F 的相对极小模型是多重的。

引理 2.1.10 设 Γ 为可约纤维 F 的一个不可约分支，$g \geqslant 1$，则 $p_a(\Gamma) < g$。

证明 我们有 $\Gamma^2 < 0$ (引理 2.1.3)，$K\Gamma \leqslant KF = 2g-2$ (引理 2.1.7)，故

$$p_a(\Gamma) = \frac{1}{2}(\Gamma^2 + K\Gamma) + 1 < g. \quad ▌$$

在研究奇异纤维的时候，利用下面的局部纤维化概念往往更为方便。

定义 2.1.11 一个*局部纤维化*为一解析映射 $f_\Delta: S_\Delta \longrightarrow \Delta$，其中 Δ 解析同胚于复平面中的单位圆盘，$\Delta \cong \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$，$S_\Delta$ 为一 2 维解析光滑流形，f_Δ 的每条纤维都是射影曲线。

一般当我们考虑局部纤维化的时候，总假设原点上的纤维 F^0 为奇异纤维，而对于所有 $t \in \Delta^* = \Delta - \{0\}$，$t$ 上的纤维 F_t 是光滑的。

如果 $f: S \longrightarrow C$ 为一整体纤维化，F_0 为 f 的一条奇异纤维，$p_0 = f(F_0)$，则对于 p_0 的任一充分小的邻域，f 限制在这个邻域上是一个局部纤维化。因此前面关于纤维的一系列概念和结论对于局部纤维化也成立。

对于任一流形 X，我们用 $\chi_{top}(X)$ 表示 X 的拓扑 Euler-Poincaré 特征标。关于它，我们首先有下面的局部结果：

引理 2.1.12 设 $f_\Delta:S_\Delta\longrightarrow\Delta$ 为一局部纤维化，F_0 为中心纤维。则存在一个从 S_Δ 到 F_0 的形变收缩。特别地，

$$\chi_{top}(S_\Delta)=\chi_{top}(F_0),\ \pi_1(S_\Delta)=\pi_1(F_0).$$

证明 取 S_Δ 上的一个充分丰富的线性系中的一个充分一般的线束 Λ，Λ 诱导一个映射 $\varphi:S_\Delta\longrightarrow\mathbf{P}^1$，因而一个映射

$$\Phi:S_\Delta\longrightarrow T=\mathbf{P}^1\times\Delta$$

由 $\Phi(p)=(\varphi(p),f_\Delta(p))$ 定义。Φ 在

$$T^*=T-p_2^{-1}(0)=\mathbf{P}^1\times\Delta^*$$

中的分枝轨迹构成一个不含关于 $p_2:T^*\longrightarrow\Delta^*$ 的垂直分支的除子 D^*。设 $x_1,\cdots,x_k\in\mathbf{P}^1$ 为 D^* 在 T 中的闭包与中心纤维的交点。于是存在 $x_1,\cdots,x_k$ 的互不相交的邻域 $U_1,\cdots,U_k$（因此在每个 x_i 附近的一个度量），以及 $0<\varepsilon\in\mathbf{R}$，$0<n\in\mathbf{Z}$ 使得对于每个 $x\in D^*$，存在 i 使得 x 落在锥形

$$\mathscr{C}_i=\{(s,t)\in T\mid |s-x_i|^n<\varepsilon|t|\}$$

的内部。我们可以假定 $\mathscr{C}_i$ 的闭包 $\bar{\mathscr{C}}_i$ 含在 $U_i\times\Delta$ 之中，且 $U_i\times\Delta$ 在 S_Δ 中的原象的每个连通分支只含 x_i 的一个原象点。现在不难构造一个形变收缩 $\delta:T\longrightarrow\mathbf{P}^1\times\{0\}$，它在 $T-U_1\times\Delta-\cdots-U_k\times\Delta$ 上等同于 p_1，并把 $\mathscr{C}_i$ 映到 x_i。由于 Φ 在锥形 $\mathscr{C}_1,\cdots,\mathscr{C}_k$ 以外的平展性，δ 诱导 S_Δ 到中心纤维的一个形变收缩。 ∎

下面的引理对于研究纤维化具有基本的重要性。

引理 2.1.13 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 g 的纤维化，F 为一条一般纤维。则

$$\begin{aligned}c_2(S)=\chi_{top}(S)&=\chi_{top}(F)\chi_{top}(C)+\sum_{F'\text{奇异纤维}}(\chi_{top}(F')-\chi_{top}(F))\\&=4(g-1)(g(C)-1)+\sum_{F'\text{奇异纤维}}(\chi_{top}(F')+2g-2).\end{aligned}$$

证明 设 $\Sigma=\{p_1,\cdots,p_n\}\subset C$ 为 f 的奇异纤维的象，$F_1,\cdots,F_n$ 为 $p_1,\cdots,p_n$ 上的纤维，$C'=C-\Sigma$，

$$S'=f^{-1}(C')=S-\sum_{i=1}^{n}F_i,$$

$f':S'\longrightarrow C'$ 为诱导映射。因为 f' 是拓扑纤维丛，我们有

$$\chi_{top}(S')=\chi_{top}(C')\chi_{top}(F);$$

另一方面，我们证明

$$\chi_{top}(S)=\chi_{top}(S')+\sum_{i=1}^{n}\chi_{top}(F_i),$$

因此两式相加即得引理。

事实上，归纳地只需考虑一个点的情形：$S'=S-\{F_1\}$。设 U 为 p_1 在 C 中的一个小邻域，Γ 为 U 的边界，$\overline{U}$ 为 U 的闭包。则由引理 2.1.12，

$$\chi_{top}(S')=\chi_{top}(S-f^{-1}(\overline{U})),$$

$$\chi_{top}(F_1)=\chi_{top}(f^{-1}(U))=\chi_{top}(f^{-1}(\overline{U})).$$

取 S 的一个三角剖分使得 $f^{-1}(\Gamma)$ 为子剖分，Mayer-Vietoris 序列给出

$$\chi_{top}(S')+\chi_{top}(f'(\overline{U}))=\chi_{top}(S)+\chi_{top}(f^{-1}(\Gamma)).$$

由于 $f^{-1}(\Gamma)$是 Γ 上的一个拓扑纤维丛而 $\chi_{top}(\Gamma)=0$，我们有

$$\chi_{top}(f^{-1}(\Gamma))=0,$$

所求得证。 ▮

§2.2 例：解析纤维丛

定义 2.2.1 一个纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 称为*解析纤维丛*，或简称*纤维丛*，如果它的每条纤维都同构于一条固定的曲线。这时关于 C 中的任一局部小邻域 D，f 所诱导的 D 上的局部纤维化是平凡的，因此 f 也称为*局部平凡的纤维化*。

我们在这一节中只讨论 $g\geqslant 2$ 的解析纤维丛，而把 $g=1$ 的情形留到下一章。设 F 为纤维丛 $f:S\longrightarrow C$ 的一条纤维。于是

$$G=\mathrm{Aut}(F)$$

是一个有限群。

例 2.2.2 设 G 为一有限群，F、$\widetilde{C}$ 为两条曲线，并假定 G 在 F 和 $\widetilde{C}$ 上都有一个作用，且它在 $\widetilde{C}$ 上的作用是自由的。于是 G 在

$\tilde{S}=\tilde{C}\times F$ 上有一个自由作用，由 $\gamma(x, y)=(\gamma(x), \gamma(y))$ 所定义，使得 $S=\tilde{S}/G$ 为一光滑曲面，且 $\tilde{S}$ 到 $\tilde{C}$ 的投影诱导一个纤维化 $f:S\longrightarrow C$，这里 $C=\tilde{C}/G$。由构造立即可以得到

$$\begin{aligned} K_S^2 &= 8(g(F)-1)(g(C)-1), \\ \chi(\mathcal{O}_S) &= (g(F)-1)(g(C)-1), \\ c_2(S) &= 4(g(F)-1)(g(C)-1). \end{aligned} \qquad (2.1)$$

我们现在来证明，任一亏格 $\geqslant 2$ 的解析纤维丛都可以由例 2.2.2 的方式得到，特别上面的不变量公式(2.1)对所有的解析纤维丛都成立。

定理 2.2.3 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 $g\geqslant 2$ 的解析纤维丛。则存在一个有限平展基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 使得拉回纤维化

$$\tilde{f}:\tilde{S}=S\times_C\tilde{C}\longrightarrow\tilde{C}$$

为平凡的。

证明 令 H 为 C 的泛覆盖空间。f 可以拉回到 H 上的一个解析纤维丛 $\varphi:\mathscr{S}=S\times_C H\longrightarrow H$，面因为 H 单连通，φ 是平凡的，即 $\mathscr{S}$ 同构于 $H\times F$ 面 φ 为第一个投影，这里 F 是 φ 的一条固定的纤维。现在 $\pi_1(C)$ 在 $\mathscr{S}$ 上有一自然作用，使得 $\mathscr{S}=S/\pi_1(C)$。对于任一 $\gamma\in\pi_1(C)$，γ 把 F 变到 φ 的另一条纤维，因此通过 $\mathscr{S}$ 到 F 的投影诱导 F 的一个自同构。这样我们得到一个群同态 $\eta:\pi_1(C)\longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$，设 K 为其核。因为 $\mathrm{Aut}(F)$ 为有限群，K 在 $\pi_1(C)$ 中是有限指标的，即 $\tilde{S}=\mathscr{S}/K$ 到 S 的诱导投影是有限的。设 $\tilde{C}=H/K$，则 $\tilde{S}$ 到 $\tilde{C}$ 的投影是一个亏格为 g 的平凡纤维化，它是 f 在诱导覆盖 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 下的拉回。]

注意定理 2.2.3 的证明是 § 2.8 中所论述的单值概念的一个特例，那里对 π_1 的讨论是用环路来描述的。

推论 $\mathbf{P}^1$ 上亏格 $\geqslant 2$ 的解析纤维丛一定是平凡的。

§ 2.3 奇异纤维的对偶图

对偶图对于研究纤维化的奇异纤维是十分有用的。设 F 为某

一纤维化的一条（奇异）纤维。F 的对偶图可以有多种途径来定义，最简单的方法是取对偶图 G'_F 的顶点集为 F 的不可约分支的集合，G'_F 的两个顶点间有棱相联当且仅当它们所对应的不可约分支相交。我们把 G'_F 叫做 F 的简单对偶图，它的缺点是不能反映 F 的足够多的信息。所以对我们更有用的是下面的定义。

定义 2.3.1　设 D 为曲面 S 上的一个有效除子。则 D 的复式对偶图记作 G_D，是一个如下定义的广义图：

G_D 的顶点集取为与 D 的不可约分支的集合成一一对应。若 v_1、v_2 分别为对应于不可约分支 Γ_1、Γ_2 的顶点，则 G_D 中以 v_1、v_2 为顶点的棱的条数为 $\Gamma_1\Gamma_2$。另外，在对应于不可约分支 Γ 的顶点 v 上，有 $p_a(\Gamma)-g(\tilde{\Gamma})$ 个圈，这里 $\tilde{\Gamma}$ 为 Γ 的正规化。图 2.1 给出了复式对偶图的一个例子。

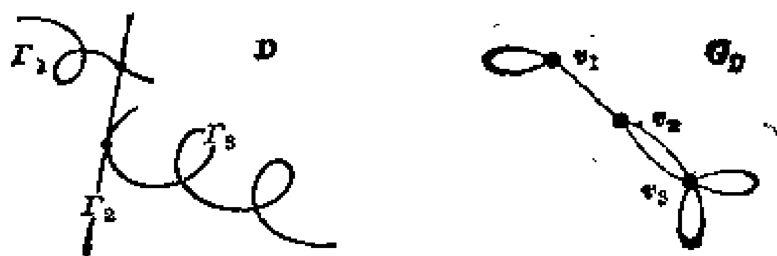


图 2.1　复式对偶图

对于某个纤维化的一条纤维 F，我们用 β_F 记 G_F 的第一Betti数 $b_1(G_F)$。

引理 2.3.2　设 F 为亏格为 g 的相对极小纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的一条纤维，Γ_1，…，Γ_t 为 F 的不可约分支。则

$$g\geqslant\beta_F+\sum_{i=1}^{t}g(\tilde{\Gamma}_i),$$

这里 $\tilde{\Gamma}_i$ 为 Γ_i 的正规化，并且等号成立当且仅当下面的条件成立：

当 $g=1$ 时，F 的每个不可约分支在 F 中都有相同的重数；否则，F 是既约的。

证明　如果 $g=0$，则 F 为一光滑有理曲线，引理显然成立；所

以可设 $g\geqslant 1$。现由 Zariski 引理 $F_{\rm red}^2\leqslant 0$，所以

$$-\sum_{i=1}^{l}\Gamma_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{l}\left(\Gamma_i\cdot\sum_{j\neq i}\Gamma_j\right).$$

另一方面，根据复式对偶图的定义，易知

$$\beta_F=\sum_{i=1}^{l}(p_a(\Gamma_i)-g(\tilde{\Gamma}_i))+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(\Gamma_i\cdot\sum_{j\neq i}\Gamma_j\right)-l+1.$$

因此

$$\begin{aligned}2g-2\geqslant K_SF_{\rm red}&=\sum_{i=1}^{l}K_S\Gamma_i\qquad(\text{由引理 }2.1.7)\\&=\sum_{i=1}^{l}(2p_a(\Gamma_i)-\Gamma_i^2)-2l\\&\geqslant\sum_{i=1}^{l}\left(2p_a(\Gamma_i)+\Gamma_i\cdot\sum_{j\neq i}\Gamma_j\right)-2l\\&=\sum_{i=1}^{l}2g(\tilde{\Gamma}_i)+2\beta_F-2.\end{aligned}$$

而且，等号成立当且仅当 $K_SF_{\rm red}=2g-2$ 及 $F_{\rm red}^2=0$，由此即得引理的条件。 ∎

由上面的引理立即可以得到关于纤维的拓扑Euler-Poincaré特征标的一个重要估计式。

定理 2.3.3 设 F 如引理 2.3.2，并设 n 为 F 的奇点个数。则

$$\chi_{\rm top}(F)\geqslant 2-2g+n,$$

且等号成立当且仅当 F 的奇点都是普通二重点（即 F 具有正规交），并且，

当 $g=1$ 时，F 的每个不可约分支在 F 中都有相同的重数；否则，F 是既约的。

证明 由引理 2.3.2 得

$$2-2g\leqslant\sum_{i=1}^{l}\chi_{\rm top}(\tilde{\Gamma}_i)-2(\beta_F+l-1).$$

设 k 为 F 的奇点集在 F 的正规化 $\tilde{F}$ 中的原象中点的个数。我们有

$$\chi_{\rm top}(F)=\sum_{i=1}^{l}\chi_{\rm top}(\tilde{\Gamma}_i)-k+n.$$

G_F 的每条棱都对应于 F 的某个奇点；如果 p 是 F 的一个奇点，k_p 是 p 在 $\tilde{F}$ 中的原象中点的个数，则 G_F 中对应于 p 的棱至少有 $k_p(k_p-1)/2$ 条，除非在 p 是普通尖点的情形，这时 p 的原象是一个点，对应的棱至少有一条。注意到 β_F+l-1 是 G_F 中棱的条数，我们有 $k\leqslant 2(\beta_F+l-1)$，且等号成立当且仅当 F 的每个奇点在 $\tilde{F}$ 中的原象都是两个点，且只对应 G_F 的一条棱。 ∎

定义 2.3.4 一条相对极小纤维 F 称为*半稳定的*，如果它是既约的，并且具有正规交。如果进一步地 F 不含 (-2)-曲线，则称为*稳定纤维*。

纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 称为*(半)稳定的*，如果它的所有纤维都是(半)稳定的。

推论 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格为 g 的相对极小纤维化，n 为 f 的所有奇异纤维中奇点的个数和。则

$$c_2(S)\geqslant 4(g-1)(g(C)-1)+n,$$

且等号成立当且仅当 f 是半稳定的($g\neq 1$ 时)，或者 f 的每条纤维的支撑集都具有正规交($g=1$ 时)。

特别地，我们有 $c_2(S)\geqslant 4(g-1)(g(C)-1)$，且等号成立当且仅当 f 是光滑的($g\neq 1$ 时)，或者 f 的每条纤维的支撑集都是光滑的($g=1$ 时)。

注 2.3.5 对于任意的纤维 F，若 F 中有 (-1)-曲线，则收缩这些曲线只可能使 β_F 增加。因此引理 2.3.2 和定理 2.3.3 中的不等式对于非相对极小的纤维化也成立。

§ 2.4 相对典范层与相对不变量

定义 2.4.1 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一纤维化。定义

$$\omega_{S/C}=\omega_S\otimes f^*\omega_C^\vee,$$

称为关于 f 的*相对对偶层*，或*相对典范层*。对应于 $\omega_{S/C}$ 的一个除子称为关于 f 的*相对典范除子*，用 $K_{S/C}$ 来表示。

例如，当 f 为一直纹时，根据引理 1.2.3 可知 $K_{S/C}^2=0$，$K_{S/C}F$

$=-2$，这里F为f的一条纤维。

纤维化的研究中一个非常重要的工具是相对典范层在C上的正象层$f_*\omega_{S/C}$。与此有关的还有层$R^1f_*\omega_{S/C}$，$f_*\mathcal{O}_S$，$R^1f_*\mathcal{O}_S$等。我们先来证明它们都是C上的局部自由层，为此需要几个预备性的引理。

引理 2.4.2 设$f:S\longrightarrow C$为一(整体或局部的)纤维化，$\mathscr{L}$为S上的一个n阶挠层。如果$\mathscr{L}$在f的每条纤维上的限制都是平凡的，则$\mathscr{L}=f^*\mathscr{M}$，其中$\mathscr{M}$是$C$上的一个$n$阶挠层。

证明 $\mathscr{L}$对应于S的一个n次平展循环覆盖$\Pi:\tilde{S}\longrightarrow S$，而$f$诱导$\tilde{S}$的一个纤维化$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$，并且诱导的底曲线的映射$\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$也是循环覆盖。由假设$f$的每条纤维$F$在$\tilde{S}$中的原象$\tilde{F}$都恰有$n$个连通分支，因此$\tilde{F}$由$\tilde{f}$的$n$条纤维组成。由此推出$\pi$也是$n$次平展覆盖，对应于$C$上的一个挠层$\mathscr{M}$。但由纤维积的泛性质易知$\tilde{S}=S\times_C\tilde{C}$，因此$\mathscr{L}$是$\mathscr{M}$的原象。 ▮

引理 2.4.3 设F为纤维化$f:S\longrightarrow C$的一个n重纤维：

$$F=nH.$$

则$\mathcal{O}_S(H)$在F上的限制是一个n阶的挠层。

证明 由引理2.1.2知$\mathcal{O}_F(nH)$是平凡的，所以$\mathcal{O}_F(H)$是一个挠层，其阶为n的一个因子。我们要证明对于任一$k<n$，$\mathcal{O}_F(kH)$不是平凡的。

我们只须考虑局部情形：$C\cong\Delta$为单位圆。不妨设$\mathcal{O}_F(kH)$平凡。作一个合适的二次覆盖，我们可以假定S中另有一条纤维$F'=nH'$，它同构于F。于是$\mathscr{L}=\mathcal{O}_S(kH-kH')$是$S$上的一个挠层，且引理2.4.2告诉我们$\mathscr{L}=f^*\mathcal{O}_C\cong\mathcal{O}_S$，即$kH$和$kH'$线性等价，因此它们生成$S$上的一个无基点的线束$\Lambda$。于是$\Lambda$对应于$S$的一个纤维化，它显然必须与$f$重合。由此可得$kH$和$kH'$都是$f$的纤维，这与假设不符。 ▮

引理 2.4.4 设F为亏格g的纤维化$f:S\longrightarrow C$的一条纤维。则$h^0(\mathcal{O}_F)=1$，$h^1(\mathcal{O}_F)=g$。

证明 因为由相伴公式得知$\chi(\mathcal{O}_F)=1-g$对任何纤维都成

立，我们只要证明 $h^0(\mathcal{O}_F)=1$。不仅如此，如果 F 是单重纤维，则 $h^0(\mathcal{O}_F)=1$ 由 Zariski 引理和 Ramanujam 的一个著名引理（[Ram]，Lemma 3）即得。所以我们可以假定 $F=nH$ 为 n 重纤维，$n>1$。同引理 2.4.3 的证明一样，可设 f 为局部纤维化，且 $F'=nH'$ 为同构于 F 的另一条纤维。

设 m 为 $\mathscr{L}=\mathcal{O}_S(H-H')$ 的阶，$m=kn$，并设 $\Pi:\widetilde{S}\longrightarrow S$ 为 $\mathscr{L}$ 所对应的 m 次平展循环覆盖。因为 $\mathscr{L}$ 在 F 上的限制是 n 阶的，Π^*F 有 k 个连通分支，并且每个连通分支都是诱导纤维化 $\tilde{f}:\widetilde{S}\longrightarrow\widetilde{C}$ 的一条纤维的 n 倍。设 $\widetilde{F}$ 为这样的一条纤维，并考虑诱导的 n 次平展循环覆盖 $\varphi:n\widetilde{F}\longrightarrow F$。我们有

$$H^0(\mathcal{O}_{n\widetilde{F}})=H^0(\mathcal{O}_F)\oplus H^0(\mathcal{O}_F(H))\oplus\cdots\oplus H^0(\mathcal{O}_F((n-1)H)).$$

一方面，对所有 i 均有 $h^0(\mathcal{O}_F(iH))\geqslant 1$；另一方面现在 $\widetilde{F}$ 是 $\tilde{f}$ 的单重纤维，所以 $h^0(\mathcal{O}_{\widetilde{F}})=1$，而正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{\widetilde{F}}(-i\widetilde{F})\longrightarrow\mathcal{O}_{(i+1)\widetilde{F}}\longrightarrow\mathcal{O}_{i\widetilde{F}}\longrightarrow 0$$

以及关于 i 的归纳法给出 $h^0(\mathcal{O}_{n\widetilde{F}})\leqslant n$。故 $h^0(\mathcal{O}_F(iH))=1$ 对所有 i 成立，特别地 $h^0(\mathcal{O}_F)=1$。 ∎

于是根据 Grauert 的上半连续性定理，有

推论 1 $f_*\omega_{S/C}$，$R^1f_*\omega_{S/C}$，$f_*\mathcal{O}_S$ 和 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 都是局部自由层，其秩分别为 g，1，1，g。特别地，$f_*\mathcal{O}_S\cong\mathcal{O}_C$。

证明 这些正象层的茎分别是 $H^0(\omega_F)$，$H^1(\omega_F)$，$H^0(\mathcal{O}_F)$，$H^1(\mathcal{O}_F)$。 ∎

同理，Grauert 的基变换定理给出以下推论：

推论 2 设 $\pi:\widetilde{C}\longrightarrow C$ 为一有限次基变换，它的分枝轨迹不通过 f 的奇异纤维的象。设 $\tilde{f}:\widetilde{S}=S\times_C\widetilde{C}\longrightarrow\widetilde{C}$ 为 f 在 π 下的拉回。则 $\widetilde{S}$ 为光滑曲面，且

$$\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{S}/\widetilde{C}}=\pi^*f_*\omega_{S/C},\qquad \tilde{f}_*\mathcal{O}_{\widetilde{S}}=\pi^*f_*\mathcal{O}_S,$$
$$R^1\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{S}/\widetilde{C}}=\pi^*R^1f_*\omega_{S/C},\qquad R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\widetilde{S}}=\pi^*R^1f_*\mathcal{O}_S.$$

注 2.4.5 上面推论 1 中正象层的局部自由性也可由后面的引理 2.5.1 直接推出，因此是个一般性的结论。但引理 2.4.4 比正象层的局部自由性更强。

引理 2.4.6 设 $f: S \longrightarrow C$ 为一纤维化。则由正合列

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S^\times \longrightarrow 0$$

诱导的上同调列

$$R^1 f_* \mathbf{Z} \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_S \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_S^\times$$

定义 C 上的一个层 $\mathrm{Jac}(f) = R^1 f_* \mathcal{O}_S / R^1 f_* \mathbf{Z}$。我们可以把 $\mathrm{Jac}(f)$ 看成 C 上的解析流形，$\mathrm{Jac}(f)$ 到 C 的投影 $j: \mathrm{Jac}(f) \longrightarrow C$ 称为 f 的雅可比簇纤维化。设 F 为 f 的一条纤维，$p = f(F)$。则

$$j^{-1}(p) = \mathrm{Pic}^0(F).$$

证明 我们知道 $\mathrm{Pic}^0(F) = H^1(\mathcal{O}_F)/H^1(F, \mathbf{Z})$ 是一个解析李群(参见 [BPV], § II.2)，并且有下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
R^1 f_* \mathbf{Z}|_p & \longrightarrow & R^1 f_* \mathcal{O}_S|_p & \xrightarrow{\beta} & R^1 f_* \mathcal{O}_S^\times|_p \\
\uparrow \alpha_1 & & \downarrow \| \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 \\
H^1(F, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_F) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F),
\end{array}$$

这里 α_1 是由 F 在 S 中的嵌入所诱导的；对于 f 的一条与 F 充分邻近的一般纤维 F_1，引理 2.1.12 的形变收缩给出一个同态

$$H_1(F_1, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(F, \mathbf{Z}),$$

取其对偶得

$$H^1(F, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(F_1, \mathbf{Z}),$$

后者诱导 $R^1 f_* \mathbf{Z}$ 在 p 点的一个芽。另外 α_2 是引理 2.4.4 给出的同构，而 α_3 是这样定义的：$R^1 f_* \mathcal{O}_S^\times|_p$ 中的一个元素 s 可以表示成 F 的某个邻域上的可逆层 $\mathscr{L}$，于是 $\alpha_3(s) = [\mathscr{L}|_F]$。由这个交换图立即可知 α_3 诱导 β 的象和 γ 的象之间的同构。

最后设 Δ 为 p 的一个小邻域，$\Delta^* = \Delta - p$。同样由于引理 2.1.12 的形变收缩，$R^1 f_* \mathbf{Z}^\vee$ 在 Δ^* 上的任一多重截面都可以拓展到 Δ 上的一个多重截面。因此由对偶性，$R^1 f_* \mathbf{Z}$ 在 Δ 上的任一非零多重截面在 p 点的限制都不为零，或者说 $R^1 f_* \mathbf{Z}$ 在 p 点的芽由不相交截面组成。于是 $\mathrm{Jac}(f) = R^1 f_* \mathcal{O}_S / R^1 f_* \mathbf{Z}$ 作为解析空间是光滑的。 ∎

现在代数几何中的对偶理论告诉我们（见 [BPV]，定理 III.

12.3)，对于 S 上的任一局部自由层 $\mathscr{F}$，存在一个典范的同构映射 $f_*(\mathscr{F}^\vee\otimes\omega_{S/C})\xrightarrow{\sim}(R^1f_*\mathscr{F})^\vee$。特别地，我们有

$$f_*\omega_{S/C}\cong(R^1f_*\mathscr{O}_S)^\vee,\ R^1f_*\omega_{S/C}\cong(f_*\mathscr{O}_S)^\vee\cong\mathscr{O}_C. \qquad (2.2)$$

注意由投影公式，$f_*\omega_{S/C}=f_*(\omega_S\otimes f^*\omega_C^\vee)\cong f_*\omega_S\otimes\omega_C^\vee$。

另外，对于 S 上的任一层 $\mathscr{L}$，我们有关于 f 的 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q}=H^p(R^qf_*\mathscr{L})\Longrightarrow H^{p+q}(\mathscr{L}).$$

特别地，因为 f 的纤维和底曲线都是一维代数簇，R^2f_* 和 C 上的 H^2 都为零，因此 Leray 谱序列诱导正合列

$$0\longrightarrow H^1(f_*\mathscr{L})\longrightarrow H^1(\mathscr{L})\longrightarrow H^0(R^1f_*\mathscr{L})\longrightarrow 0,$$

以及 $H^2(\mathscr{L})\cong H^1(R^1f_*\mathscr{L})$。将 $\mathscr{L}$ 以 $\mathscr{O}_S$ 代入得

$$q(S)=g(C)+h^0(R^1f_*\mathscr{O}_S)=g(C)+h^1(f_*\omega_S),$$

以及一个平凡的等式

$$p_g(S)=h^0(\omega_S)=h^0(f_*\omega_S)=h^1(R^1f_*\mathscr{O}_S).$$

现在我们可以来定义关于纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的相对不变量了。

定义 2.4.7　设 $f:S\longrightarrow C$ 的亏格 $g\geqslant 1$。定义

$$\chi_f=\chi(\mathscr{O}_S)-(g-1)(g(C)-1)=\deg f_*\omega_{S/C},$$

(由定理 A 1.7)

$$e_f=c_2(S)-4(g-1)(g(C)-1)=\sum_{F'\text{有异纤维}}(\chi_{\rm top}(F')-\chi_{\rm top}(F)),$$

$$q_f=q(S)-g(C)=h^1(f_*\omega_S)=h^0(R^1f_*\mathscr{O}_S);$$

根据 $K_{S/C}$ 的定义，我们还有

$$K_{S/C}^2=K_S^2-8(g-1)(g(C)-1);$$

当 $\chi_f\neq0$ 时，还可以定义 f 的斜率

$$\lambda_f=K_{S/C}^2/\chi_f.$$

我们以后谈论 λ_f 时总假定 $\chi_f\neq0$。

χ_f，$K_{S/C}^2$，e_f，q_f 是分别对应于 $\chi(\mathscr{O}_S)$，K_S^2，$c_2(S)$，$q(S)$ 的相对不变量，而 λ_f 是由公式

$$K_S^2=\lambda_f\chi(\mathscr{O}_S)+(8-\lambda_f)(g-1)(g(C)-1) \qquad (2.3)$$

所唯一确定的常数。q_f 称为 f 的相对不规则性，当它 $\neq0$ 时，我们

称 f 为不规则的。另外，绝对情形的 Noether 公式给出

$$12\chi_f = K^2_{S/C} + e_f. \tag{2.4}$$

因此由定理 2.2.3，若 f 为解析纤维丛，则

$$K^2_{S/C} = \chi_f = e_f = 0.$$

从曲面的相伴公式 (1.2) 我们还立即可以得到关于一个纤维化 f 的相对相伴公式。设 $f:S\longrightarrow C$ 为一纤维化，D 为 S 上的一条既约曲线。先假设 D 中不含垂直分支。则 f 诱导 D 到 C 的一个自然投影 $\varphi: D\longrightarrow C$，并且我们可以定义 φ 的分歧指数：如果 p 为 D 上的一个光滑点，则 φ 在 p 点的分歧指数可以按照通常光滑曲线的方式定义；否则，定义 φ 在 p 点的分歧指数为 D 的正规化到 C 的投影在 p 的原象上的分歧指数之和加上奇异点 p 对 D 的算术亏格的影响的二倍。

引理 2.4.8 (相对相伴公式) 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一纤维化，D 为 S 上的一条不含垂直分支的既约曲线。则 D 到 C 的投影 $\varphi: D\longrightarrow C$ 的分歧指数为 $D^2 + DK_{S/C}$。

注 2.4.9 一般地，即使 D 含有垂直分支，我们也可以直接用 $D^2 + DK_{S/C}$ 来定义 φ 的分歧指数。这样，例如如果 D 中含有一条与其余分支不相交的光滑垂直分支 E，则 E 对 φ 的分歧指数所作的贡献就等于 $2g(E)-2$。特别地，若 D 中不含由垂直曲线组成的连通分支，则它在 C 上的分歧指数非负。

我们已从定理 2.3.3 的推论看到 $e_f\geqslant 0$，且等号成立当且仅当 f 是光滑的。我们还有以下定理：

定理 2.4.10 (相对不变量的非负性) 设 $f:S\longrightarrow C$ 为亏格 $g\geqslant 1$ 的一个相对极小纤维化。

1) $f_*\omega_{S/C}$ 是半正定的，所以 $\chi_f\geqslant 0$[F]。

2) $K_{S/C}$ 是数值正的，所以 $K^2_{S/C}\geqslant 0$；并且在 $g\geqslant 2$ 时，$K^2_{S/C}=0$ 当且仅当 $\chi_f=0$。

3) $0\leqslant q_f\leqslant g$，且 $q_f=g$ 当且仅当 f 是平凡的($g>1$ 时)，或 f 的每条纤维都是某条光滑椭圆曲线的整数倍($g=1$ 时)。

证明 我们注意下面的事实：

引理 2.4.11　设 $f: S \longrightarrow C$ 为任一纤维化。则 $H^0(R^1f_*\mathcal{O}_S)$ 生成 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 的一个秩为 q_f 的平凡饱和子层，它是 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 的一个直和因子。

证明　设 $\alpha: S \longrightarrow A$ 为 S 的 Albanese 映射，则 α 的泛性质诱导一个阿贝尔簇的满射同态 $\tilde{\varepsilon}: A \longrightarrow J(C)$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varepsilon}} \\ C & \longrightarrow & J(C) \end{array}$$

当 $g(C)>0$ 时，把 C 看成是 $J(C)$ 的一个子簇，则 $\tilde{\varepsilon}$ 诱导 C 上的一个阿贝尔簇的纤维化 $\varepsilon: \mathscr{E} = \tilde{\varepsilon}^{-1}(C) \longrightarrow C$，这就是所谓的 f 的雅可比簇纤维化的常值部分。若 $g(C)=0$，则 $J(C)$ 为一个点，这时定义常值部分为 $\varepsilon: \mathscr{E} = A \times_{J(C)} C \longrightarrow C$。$\varepsilon$ 的每条纤维都同构于一个固定的阿贝尔簇，但 ε 不一定是平凡纤维化。

注意我们这样定义的常值部分 $\mathscr{E}$ 不一定含单位截面，所以不一定有 f 的雅可比簇纤维化到 $\mathscr{E}$ 的映射。但是 α 诱导 S 到 $\mathscr{E}$ 的 C-映射。

对于 f 的每条纤维 F，ε 的对应纤维是 $J(F)$ 的一个商阿贝尔簇，因而它诱导 $J(F)$ 的李代数 $H^1(\mathcal{O}_F)$ 的一个唯一确定的直和分解 $H^1(\mathcal{O}_F) = V_1 \oplus V_2$，其中 V_2 对应于这个常值部分。由于 $H^1(\mathcal{O}_F)$ 是 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 在 $f(F)$ 上的茎(引理 2.4.4)，这个分解导致 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 的一个直和分解 $R^1f_*\mathcal{O}_S = \mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2$，其中 $\mathscr{V}_2$ 对应于常值部分，所以 $\mathrm{rk}(\mathscr{V}_2) = q_f$。另一方面，$\mathscr{V}_2$ 也同构于 $R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$，而 $R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$ 显然是平凡的。 ▮

引理 2.4.11 的一个直接推论是，对任一纤维化 $\tilde{f}: \tilde{S} \longrightarrow \tilde{C}$，$R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ 的整体截面都是零次的。现在设 Σ 为 f 的奇异纤维在 C 上的象，由定理 1.2.5 的推论和引理 2.4.4 的推论 2 直接可知 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 是半负定的。再由 (2.2)，$f_*\omega_{S/C}$ 是半正定的。此乃 1)。

设 B 为 S 上的一条不可约曲线。若 B 含在某条纤维中，则引

理 2.1.7 已经给出 $K_{S/C}B\geqslant 0$。故我们可设 f 诱导的投影映射 $\varphi:B\longrightarrow C$ 是一个 d 次的有限映射。不妨假定 $K_{S/C}B<0$。取 Σ 为 φ 的分枝轨迹和 f 的奇异纤维的象的并集，则 B 关于任一 Σ-基变换的拉回都是不可约的，因此模了一个次数充分大的 Σ-基变换后，可设 $K_{S/C}B<-d$。如果 $D=K_{S/C}+F$，这里 F 为任一纤维，就有 $BD<0$。我们来从中推出矛盾。

事实上，因为 $f_*\omega_{S/C}$ 半正定，$f_*\mathcal{O}_S(D)=f_*\omega_{S/C}\otimes\mathcal{O}_C(p)$ 是正定的，这里 $p=f(F)$。设 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为 Σ-基变换使 $\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\tilde{D})$ 有一个正次数的整体截面 s（这里我们用 ~ 来表示任一几何对象在 π 下的拉回）。s 对应于 $\tilde{S}$ 中的一个有效除子 D'。则我们有 $\tilde{B}D'<0$，因而 $\tilde{B}K_{\tilde{S}/\tilde{C}}<0$，但这样相对相伴公式（引理 2.4.8）就给出 $\tilde{B}^2>0$，然而一个自相交数大于零的不可约除子和一个有效除子的相交数显然不可能是负数，因此 $K_{S/C}$ 数值为正。

如果 $g>1$ 且 $\chi_f>0$，由于引理 2.4.4 的推论 2，模了一个 Σ-基变换后，我们可设 $f_*\omega_{S/C}$ 有一个正次数的整体截面 s。因为 s 也可看成是 $\omega_{S/C}$ 的一个截面，它对应于 S 上的一个除子 $K_{S/C}$，使得 $K_{S/C}=D+f^*B$，其中 D 是 S 上的有效除子，$B=\operatorname{div}(s)$ 是 C 上的正次数有效除子。于是

$$K_{S/C}^2=K_{S/C}D+K_{S/C}f^*B\geqslant\deg B(2g-2)>0.$$

另一方面由相对 Noether 公式和 e_f 的非负性，$\chi_f=0$ 必须

$$e_f=K_{S/C}^2=0,$$

故 2) 成立。

3) $q_f\leqslant g$ 是引理 2.4.11 的直接推论。设 $q_f=g$，则

$$f_*\omega_{S/C}\cong\mathcal{O}_C^{\oplus g}$$

是平凡的，$\chi_f=0$，从而由相对 Noether 公式知 $K_{S/C}^2=e_f=0$，特别当 $g=1$ 时定理中的条件满足。剩下只需要证明当 $g>1$ 时 f 是平凡的。

首先注意线性系 $|K_{S/C}|$ 没有固定部分，设 Z 为 $|K_{S/C}|$ 的固定部分，$|K_{S/C}|=|M|+Z$，则由 2)，

$$K_{S/C}^2=M^2+MZ+K_{S/C}Z\geqslant M^2\geqslant 0,$$

所以
$$M^2=MZ=Z^2=0.$$
因为f的每条纤维都是不可约的，Z没有垂直不可约分支，且Z与一条一般纤维F的交是$|K_{S/C}|$在F上的限制的固定部分。然而$f_*\omega_{S/C}$由整体截面生成意味着$|K_{S/C}|$在F上的限制就是$|K_F|$全体，所以没有固定点，因而$Z=0$。

因为$K_{S/C}^2=0$，由$|K_{S/C}|$定义的映射$\Phi:S\longrightarrow\mathbf{P}^{g-1}$的象是一条曲线，所以$\Phi$通过一个纤维化$\varphi:S\longrightarrow D$分解。显然$F$的典范映射通过$\varphi$在$F$上的限制分解。于是当$F$是非超椭圆曲线时，$D\simeq F$，且$\varphi$的纤维都是$f$的截面，所以$S\cong C\times D$，定理得证。现在我们只要考虑这样的情形：$F$是超椭圆的，$D\cong\mathbf{P}^1$，且$\varphi$在$F$上的限制是$F$的超椭圆二次覆盖。换言之，$\varphi$的一条一般纤维到$C$上的投影是二次的。注意，由相对相伴公式，这个投影是平展的。于是φ的任一条纤维要么不通过f的纤维的Weierstrass点，要么全由Weierstrass点组成。

f和φ诱导一个二次覆盖$\theta:S\longrightarrow P=C\times D$：对任一$p\in S$，$\theta(p)=(f(p),\varphi(p))$。设$(B,\delta)$是对应的二次覆盖数据。我们有$B=p_2^*(B')$，其中$B'$是$D$上的一个$2g+2$次除子，因此
$$\delta=p_1^*(\delta'')+p_2^*(\delta'),$$
其中δ''和δ'分别是C上的一个二阶挠元和D上的一个$g+1$次除子。现在由二次覆盖的性质很容易看出
$$f_*\omega_{S/C}=p_{1*}(\omega_{P/C}\otimes\delta)=p_{1*}p_2^*(\omega_D\otimes\delta')\otimes\delta'',$$
因而由$f_*\omega_{S/C}$的平凡性知δ''是平凡的。但这样一来，p_2的一条一般纤维在S中的原象不是连通的，与φ为纤维化的假设相矛盾。 ∎

由χ_f的非负性和(2.3)立即得到以下推论。

推论　$\lambda_f<8$(或$=$，$>$)当且仅当$K_S^2<8\chi(\mathcal{O}_S)$($=$，$>$)。

注 2.4.12　由定理2.3.3的推论、定理2.4.10和相对Noether公式(2.4)直接推得，$\chi_f=0$当且仅当$K_{S/C}^2$和e_f同时为零(特别地，这时若$g>1$，则f是光滑的；若$g=1$，则f的所有纤维都是某条光滑椭圆曲线的整数倍)。我们以后将要看到(定理6.2.1)，

$K^2_{S/C}=\chi_f=0$ 当且仅当 f 是解析纤维丛。

注 2.4.13　当 $g>1$ 并且 f 非平凡时，关于 q_f 的上界我们有比定理 2.4.10 更精确的估计，见命题 6.2.2。

§2.5　相对典范和多典范映射

我们先来讨论一般情形：S 上的可逆层与 C 上的有理映射的关系。我们还是用 $f:S\longrightarrow C$ 来记一个纤维化。

引理 2.5.1　设 $\mathscr{E}$ 为 S 上的一个局部自由层。则 $f_*\mathscr{E}$ 在 C 上局部自由。

证明　设 $\mathscr{L}$ 为 S 上的一个充分丰富的可逆层，s 为 $\mathscr{L}$ 的一个整体截面。s 定义 $\mathscr{O}_S$ 到 $\mathscr{L}$ 的一个嵌入，它可以扩展到

$$\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}.$$

因为 $\mathscr{L}$ 充分丰富，对于 f 的每条纤维 F 我们都有

$$H^1(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}|_F)=0,$$

所以 $H^0(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}|_F)$ 是常数，然后由 Grauert 定理，$f_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})$ 是 C 上的局部自由层。而作为局部自由层 $f_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})$ 的子层，$f_*\mathscr{E}$ 也是局部自由的。 ∎

注 2.5.2　与 $f_*\omega_{S/C}$ 的情形不同，在一般情形下 $H^0(\mathscr{E}|_F)$ 不是常数。但是总存在单射同态 $f_*\mathscr{E}|_p\longrightarrow H^0(\mathscr{E}|_F)$，其中 F 为任一纤维，$p=f(F)$。

定义 2.5.3　设 $\mathscr{L}$ 为 S 上的一个可逆层。$\mathscr{L}$ 定义了一个 C 上的有理映射

$$\Phi_{\mathscr{L},C}:S\dashrightarrow\mathrm{Proj}((f_*\mathscr{L})^\vee);$$

对于 f 的任一纤维 F，若 $p=f(F)$，Λ 为 $f_*\mathscr{L}|_p$ 所对应的 $H^0(\mathscr{L}|_F)$ 的子空间，则

$$\Phi_{\mathscr{L},C}|_F=\Phi_\Lambda:F\dashrightarrow\Lambda^\vee.$$

如果 $\mathscr{M}$ 是 C 上的一个可逆层，则 $\Phi_{\mathscr{L}\otimes f^*\mathscr{M},C}=\Phi_{\mathscr{L},C}$。

当 $\mathscr{L}=\omega_{S/C}^{\otimes n}$ 为相对 n-典范层($n\geq1$)时，$\mathscr{L}$ 定义的 C-有理映射 $\Phi_{nK,C}$ 称为相对 n-典范映射。当 $n=1$ 时 $\Phi_{K,C}$ 称为相对典范

映射。因为这时 $H^0(\mathscr{L}|_F)$ 都是常数，相对 n-典范映射在任一纤维上的限制就是这条纤维的 n-典范映射。

我们也可以和曲面情形一样定义相对典范模型：S 上的张量积 $\omega_{S/C}^{\otimes m}\otimes\omega_{S/C}^{\otimes n}\longrightarrow\omega_{S/C}^{\otimes m+n}$ 自然地诱导同态

$$f_*(\omega_{S/C}^{\otimes m})\otimes f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n})\longrightarrow f_*(\omega_{S/C}^{\otimes m+n}),$$

它定义了 C 上的一个分次环层

$$\mathscr{R}=\bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n}).$$

于是 S 在 C 上的相对典范模型 X 就可以定义为 $X=\mathrm{Proj}(\mathscr{R})$，它在 $g=1$ 时同构于 C，在 $g\geqslant 2$ 时是 C 上的一个曲面。

§ 2.6　基变换与稳定约化

定义 2.6.1　设 $f:S\longrightarrow C$ 为一相对极小纤维化，$\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为一有限基变换。我们定义 f 在 π 下的拉回为纤维积 $S\times_C\tilde{C}$ 的光滑化的相对极小模型 $\tilde{S}$ 到 $\tilde{C}$ 的诱导映射 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$。

$\tilde{S}$ 可以这样构造：设 $\rho_1:S_1\longrightarrow S\times_C\tilde{C}$ 为 $S\times_C\tilde{C}$ 的正规化，$\rho_2:S_2\longrightarrow S_1$ 为 S_1 的极小非奇异化。我们有诱导纤维化 $f_2:S_2\longrightarrow\tilde{C}$。当 f 的亏格为零时，$S_2\cong S\times_C\tilde{C}$ 在 $\tilde{C}$ 上是光滑的，所以相对极小；否则，我们有唯一的一个收缩映射 $\tilde{\rho}:S_2\longrightarrow\tilde{S}$ 使得 $\tilde{S}$ 为 $\tilde{C}$ 上的相对极小模型，如下面的交换图所示：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{S} & \xleftarrow{\tilde{\rho}} & S_2 & \xrightarrow{\rho_2} & S_1 & \xrightarrow{\rho_1} & S\times_C\tilde{C} & \xrightarrow{\Pi'} & S\\
\downarrow{\scriptstyle\tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\
\tilde{C} & = & \tilde{C} & = & \tilde{C} & = & \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C
\end{array}$$

我们设 $\Pi_2=\Pi'\circ\rho_1\circ\rho_2:S_2\longrightarrow S$，并设 $\Pi:\tilde{S}\dashrightarrow S$ 为诱导的有理映射。

引理 2.6.2　对任一纤维化 $f:S\longrightarrow C$，存在一个基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 使得拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 有截面。

证明　在 S 上取一充分丰富的线性系 Λ，则 Λ 中的一个一般

元为一光滑不可约除子 D，使得 f 诱导的投射 $\pi: D\longrightarrow C$ 为有限的。取 $\tilde{C}=D$，并以 π 作基变换。则 $D\times_C\tilde{C}$ 到 $\tilde{C}$ 的投影通过 $S\times_C\tilde{C}$ 分解，而 $D\times_C\tilde{C}$ 中的对角线映到 $S\times_C\tilde{C}$ 在 $\tilde{C}$ 上的一个截面 E。现在 E 在 $\tilde{S}$ 中的严格原象即为 $\tilde{f}$ 的一个截面。 ∎

定理 2.6.3 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一相对极小纤维化，$\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 是一 d 次有限基变换，$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 为 f 在 π 下的拉回。则

$$K^2_{\tilde{S}/\tilde{C}}\leqslant dK^2_{S/C},\ \chi_{\tilde{f}}\leqslant d\chi_f.$$

证明 考虑 S_2 上的除子 $K_1=\tilde{\rho}^*K_{\tilde{S}/\tilde{C}}$ 和 $K_2=\Pi_2^*K_{S/C}$。我们有

$$K_1^2=K^2_{\tilde{S}/\tilde{C}},\ K_2^2=dK^2_{S/C},$$

$$f_{2*}\mathcal{O}_{S_2}(K_1)=\tilde{f}_*\omega_{\tilde{S}/\tilde{C}},\quad f_{2*}\mathcal{O}_{S_2}(K_2)=\pi^*f_*\omega_{S/C}.$$

我们证明 K_2-K_1 线性等价于一个由垂直曲线组成的有效除子 D，因此

$$\tilde{f}_*\omega_{\tilde{S}/\tilde{C}}=f_{2*}\mathcal{O}_{S_2}(K_1)\subseteq f_{2*}\mathcal{O}_{S_2}(K_2)=\pi^*f_*\omega_{S/C}$$

(故 $\chi_{\tilde{f}}\leqslant d\chi_f$)，并且由 K_1 和 K_2 的数值正性，

$$K_2^2=(K_1+D)K_2=K_1^2+K_1D+K_2D\geqslant K_1^2.$$

事实上，设 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ 为 $S\times_C\tilde{C}$ 的一维非正规轨迹在 S_2 中的严格原象的不可约分支，$Z_1,\cdots,Z_m$ 为 ρ_2 的例外曲线全体。正规化的公式告诉我们

$$K_{S_2/\tilde{C}}\equiv K_2-\sum_{i=1}^{n}k_i\Gamma_i-Z=K_2-D',\tag{2.5}$$

其中 $k_i>0$(事实上,如果 a 为 π 在点 $f_2(\Gamma_i)$ 上的分歧指数，b 为 Γ_i 在 S 中的象曲线在包含它的纤维中的重数，$c=\gcd(a,b)$，则 Γ_i 在纤维中的重数为 b/c，$k_i=(ab-a-b)/c+1)$，Z 的支撑集在 $Z_1,\cdots,Z_m$ 上。我们要证明 Z 是有效除子。

设 $Z=Z'-Z''$，其中 Z' 和 Z'' 都是有效除子，且没有公共分支。如果 $Z''\neq0$，则因为 S_2 的相交二次型限制在 $Z_1,\cdots,Z_m$ 的类生成的子空间上是负定的，$Z''^2<0$，从而 Z'' 中有一个不可约分支 Z_1 使得 $Z''Z_1<0$。因为 Z_1 不在 Z' 中出现，$ZZ_1>0$，并由 (2.5)，$K_{S_2/\tilde{C}}Z_1<K_2Z_1=0$。由此立即可得 Z_1 是 (-1)-曲线，与

ρ_2 的极小性矛盾，故 D' 是有效除子。

另一方面，我们知道 $K_1 \equiv K_{S_1/\tilde{C}} - D''$，其中 D'' 是 ρ_2 的例外曲线的支撑集所构成的除子，所以 $K_2 - K_1 \equiv D' + D''$ 是有效除子。 ∎

定义 2.6.4 设 $\tilde{\Delta}$ 和 Δ 为两个解析同胚于单位圆盘的局部曲线，分别以 u 和 t 为局部坐标。则 $\tilde{\Delta}$ 到 Δ 的一个 $n:1$ 映射为由方程 $t=u^n$ 定义的解析映射 $\pi_n: \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$。这时对于以 Δ 为底的一个局部纤维化 $f_\Delta: S_\Delta \longrightarrow \Delta$，我们可以和定义 2.6.1 一样定义 f_Δ 在 π_n 下的拉回 $\tilde{f}_\Delta: \tilde{S}_\Delta \longrightarrow \tilde{\Delta}$，并且可以沿用定义 2.6.1 中的记号。

对任一整体基变换 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$ 和 $\tilde{C}$ 中任一点 p，存在 p 的一个邻域 $\tilde{\Delta}$ 使得 π 限制在 $\tilde{\Delta}$ 及其象上为一 $n:1$ 基变换。因此在研究奇异纤维在基变换下的性质时，往往只需要考虑局部纤维化和 $n:1$ 基变换即可。

定义 2.6.5 如果一个基变换 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$ 满足

$$\tilde{\rho}^* K_{\tilde{S}/\tilde{C}} \equiv \Pi_2^* K_{S/C},$$

我们称它为不变基变换。关于不变基变换，我们有

$$\tilde{f}_*(\omega_{\tilde{S}/\tilde{C}}^{\otimes n}) = \pi^* f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n}) \ (n \geq 1),$$

$$\chi_{\tilde{f}} = d\chi_f, \quad e_{\tilde{f}} = de_f, \quad K^2_{\tilde{S}/\tilde{C}} = dK^2_{S/C}.$$

而当 $g>1$ 时，由代数指标定理可知 π 为不变的当且仅当

$$K^2_{\tilde{S}/\tilde{C}} = dK^2_{S/C}.$$

另一方面，定理 2.6.3 的证明告诉我们 π 为不变的当且仅当 S_2 相对极小，ρ_1 为余维数一的同构（换句话说 π 的分枝轨迹上的纤维都是既约的），且 ρ_2 的例外曲线都是 (-2)-曲线（换句话说 S_1 的奇点都是有理二重点）。

如果 π 的分枝轨迹在 S 中的原象是由光滑纤维组成的，则它显然是不变基变换。由于奇异纤维只有有限多条，因此在定理 1.2.5 中，把 Σ-基变换换成不变基变换也成立。更进一步有以下命题：

命题 2.6.6 如果基变换 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$ 的分枝轨迹在 S 中的原

象是由半稳定纤维组成的，则 π 是不变的。

证明 我们只需要考虑局部情形，设 F_0 为局部纤维化 $f_\Delta: S_\Delta \longrightarrow \Delta$ 的中心纤维，$\pi = \pi_n : \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$ 为 $n:1$ 映射，$\tilde{F}$ 为 $S_\Delta \times_\Delta \tilde{\Delta}$ 的中心纤维。因为 F_0 是既约的，$S_\Delta \times_\Delta \tilde{\Delta}$ 的奇点都是 F_0 的奇点(普通二重点)的原象。设 p 为这样一个奇点，q 为其在 $S_\Delta \times_\Delta \tilde{\Delta}$ 中的原象。

因为一个曲面的奇点的非奇异化的组合特性只和它的解析性质有关，我们可以设所有有关的点的局部环都是解析局部环，于是设 t 为 Δ 的局部坐标，$\mathcal{O}_{p,S_\Delta}$ 有两个生成元 x、y 使得 f_p 在 p 点的限制是由方程 $t = xy$ 定义的。设 u 为 $\tilde{\Delta}$ 的局部坐标，

$$\mathcal{O}_q = \mathbf{C}[[u, x, y]]/(u^n - xy),$$

这说明 q 是 $S \times_\Delta \tilde{\Delta}$ 的一个 A_n 型的有理二重点。因此 $S \times_\Delta \tilde{\Delta}$ 是正规的，$\rho_1 \circ \rho_2$ 由对于所有这样的 A_n 型有理二重点的爆发组成，由此易见 S_2 相对极小。 ∎

命题 2.6.6 的逆命题不真。例如，如果点 p 是纤维中由方程 $t = x^2 - y^3$ 定义的一个尖点，π 是一个局部次数为 4 的基变换，则 p 在 $S \times_C \tilde{C}$ 中的原象是一个 E_6 型的有理二重点，如图 2.2 所示，图中的 Γ_i 都是 (-2)-曲线。

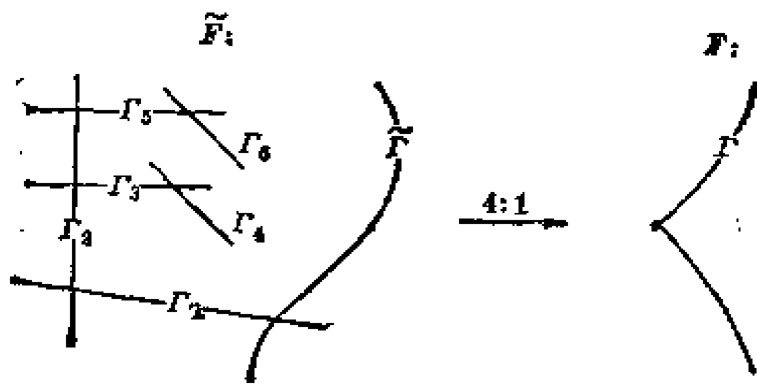


图 2.2 尖点在 4 次基变换下的原象

猜想 2.6.7 我们猜测对于一个 d 次的基变换 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$，同样有 $e_{\tilde{f}} \leqslant d e_f$，并且如果在关于 $K^2_{S/C}$，χ_f 和 e_f 的三个不等式中只要有一个等号成立，π 就一定是不变的，因此三个等号都成立。但

是关于 e_f 的不等式看上去要比另两个困难得多。

现在来证明以下定理。

定理 2.6.8(稳定约化定理，[DM][AW]) 设 $f:S\longrightarrow C$ 为任一纤维化。存在一个基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 使得拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 是半稳定的。

证明 我们显然只需考虑对应的局部情形，设 F_0 为局部纤维化 $f_\Delta:S_\Delta\longrightarrow\Delta$ 的中心纤维，$\pi=\pi_d:\tilde{\Delta}\longrightarrow\Delta$ 为 $d:1$ 映射。对 S_Δ 作了适当的爆发以后，我们可以假设 F_0 有正规交(但不一定是相对极小的)。设 d 为 F_0 的不可约分支在 F_0 中的重数的最小公倍数，我们来证明拉回纤维化 $\tilde{f}_\Delta:\tilde{S}_\Delta\longrightarrow\tilde{\Delta}$ 是半稳定的。

与命题 2.6.6 的证明一样考虑解析局部环，设 p 为 F_0 上的一个点，q 为 p 在 $S_\Delta\times_\Delta\tilde{\Delta}$ 中的原象，ξ 为 q 在 $\tilde{\Delta}$ 中的象，

$$\mathscr{O}_{f(p),\Delta}=\mathbf{C}[[t]],\ \mathscr{O}_{\xi,\tilde{\Delta}}=\mathbf{C}[[u]],\ t=u^d,\ \mathscr{O}_{p,S_\Delta}=\mathbf{C}[[x,y]].$$

如果 p 是 F_0 的一个光滑点，我们可设 $t=x^n$，其中 n 为 F_0 中含 p 的不可约分支在 F_0 中的重数，所以 $d=kn$。则

$$\mathscr{O}_{q,S_{\Delta\times_\Delta}\tilde{\Delta}}=\mathbf{C}[[u,x,y]]/(u^d-x^n),$$

这个环的整闭包中恰有 n 个正则极大理想，所以 q 在 $S_\Delta\times_\Delta\tilde{\Delta}$ 的正规化 S_1 中的原象由 n 个光滑点组成，并且这些点在纤维中都是既约的。

现在设 p 是 F_0 的一个普通二重点，所以 $t=x^my^n$，这里 m 和 n 分别是 F_0 中过 p 的两个局部分支的重数，所以 $m|d$，$n|d$。设 $a=\gcd(m,n)$，$b=d/\mathrm{lcm}(m,n)$。因为

$$\mathscr{O}_{q,S_{\Delta\times_\Delta}\tilde{\Delta}}=\mathbf{C}[[u,x,y]]/(u^d-x^my^n),$$

局部环的计算立即给出 p 在 S_1 中的原象为 a 个点 $q_1,\cdots,q_a$，它们的局部环都是形如

$$\mathscr{O}_{q_i,S_1}=\mathbf{C}[[u,x,y]]/(u^b-xy)$$

的。所以 q_i 都是 S_1 中 A_{b-1} 型的有理二重点，于是 S_2 的纤维都是既约的，并且具有正规交。现在 $\tilde{\rho}:S_2\longrightarrow\tilde{S}_\Delta$ 是由 S_2 的纤维中的 (-1)-曲线的收缩组成的，所以 $\tilde{S}_\Delta$ 的纤维也都是既约的，并且具有正规交。 ∎

由这个定理的证明还不难得到下面的结论。

引理 2.6.9 设 $f_\Delta: S_\Delta \longrightarrow \Delta$ 为一局部纤维化，其中心纤维 F_0 为一重数为 n 的多重纤维。设 $\tilde{f}_\Delta: \tilde{S}_\Delta \longrightarrow \tilde{\Delta}$ 为 f_Δ 关于 $n:1$ 基变换的拉回，$\tilde{F}$ 为其中心纤维。则 $\tilde{F}$ 为单重纤维，且 $\tilde{S}_\Delta$ 到 S_Δ 的诱导覆盖为平展的。特别地，单连通的纤维一定是单重的。

不变基变换的一个重要的用途是可以从一个给定的纤维化构造出一系列新的纤维化，这不仅对于纤维化的分类问题具有重要的意义，而且成为一般型曲面的地理问题中构造例子的一个基本工具。具体地说，我们有下面的命题，它的证明是平凡的。

命题 2.6.10 设 $f: S \longrightarrow C$ 为一相对极小纤维化，n 为一正整数，$b = g(C)$。对于任意满足

$$\tilde{\chi} = n\chi_f,\ \tilde{K} = nK^2_{S/C},\ \tilde{b} \geqslant nb - n + 1,\ \tilde{b} \geqslant 0$$

的一组整数 $\{\tilde{\chi}, \tilde{K}, \tilde{b}\}$，一定存在一个不变基变换 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$ 使得拉回纤维化 $\tilde{f}: \tilde{S} \longrightarrow \tilde{C}$ 满足

$$\chi_{\tilde{f}} = \tilde{\chi},\ K^2_{\tilde{S}/\tilde{C}} = \tilde{K},\ g(\tilde{C}) = \tilde{b}.$$

推论 设 S 为一代数曲面，它有一个相对极小的亏格 g 纤维化 $f: S \longrightarrow C$。对任意整数 $n \geqslant 2$ 和 $a \geqslant n-1$（当 $g(C) > 0$ 时可设 $a \geqslant 0$），存在一个不变基变换 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$ 使得对于拉回纤维化 $\tilde{f}: \tilde{S} \longrightarrow \tilde{C}$ 有

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = n\chi(\mathcal{O}_S) + a(g-1),\ K^2_{\tilde{S}} = nK^2_S + 8a(g-1).$$

证明 事实上，可取 $\tilde{b}$ 使得 $a = \tilde{b} - 1 - n(b-1)$。 ▮

这个推论的意义是，给定一个纤维化的曲面 S，通过对 S 的纤维化作不变基变换所得到的曲面在以 K^2 和 χ 为坐标的平面的一个以 $(K^2_S, \chi(\mathcal{O}_S))$ 为顶点的无限扇形中构成一个格，这个扇形的边界分别是 $K^2 = (K^2_S/\chi(\mathcal{O}_S))\chi$ 和 $K^2 = 8\chi$。这个格的密度是由纤维化的亏格和 $\chi(\mathcal{O}_S)$ 所决定的。通过选取一个合适的满足 $K^2_S = 9\chi(\mathcal{O}_S)$ 的曲面 S 为出发点，Sommese [So] 用这个办法证明了一般型曲面的斜率 K^2/χ 在区间[2, 9]内处处稠密。

不变基变换如果和下面定义的纤维扭曲概念相配合，在合适的条件下有可能将上述格加密成整个扇形(见定理 6.4.2)。

首先，设 $f:S\longrightarrow C$ 和 $f':S'\longrightarrow C$ 为两个纤维化，p 为 C 上的一个点。f 和 f' 称为在 p 局部同构，如果有 p 在 C 中的一个解析邻域 Δ，使得 f 和 f' 限制在 Δ 上是同构的局部纤维化。

定义 2.6.11　设 $f:S\longrightarrow C$ 为一纤维化，其中 S 有一个 n 阶循环 C-自同构群 $G=\langle\gamma\rangle$（即满足 $f(\gamma(p))=f(p)$，$\forall p\in S$）。设 $\pi:\widetilde{C}\longrightarrow C$ 为一个 n 阶循环基变换，它在两个点 p_1、$p_2\in C$ 上有完全分歧；$\tilde{f}:\widetilde{S}\longrightarrow\widetilde{C}$ 为拉回纤维化。$\widetilde{S}$ 上有两个同构的 n 阶循环自同构群，一个是 G 的拉回 G_1，它是 $\widetilde{C}$-自同构群；另一个由 π 所对应的 $\widetilde{C}$ 的自同构所诱导，记作为 G_2（因此 S 双有理等价于商 $\widetilde{S}/G_2$）。设 $\alpha:G_1\longrightarrow G_2$ 为一群同构。显然 G_1 和 G_2 可交换，所以形如 $\gamma\cdot\alpha(\gamma^{-1})$ 的元素构成 $\widetilde{S}$ 上的一个新的 n 阶自同构群 G_3。G_3 在 $\widetilde{C}$ 上诱导的就是 π 所对应的自同构群，因此 $\widetilde{S}/G_3$ 的极小非奇异化 S'' 到 C 有一个纤维化 $f'':S''\longrightarrow C$。设 $f':S'\longrightarrow C$ 为 f'' 的相对极小模型。由这个构造方法立即可知 f 和 f' 恰在 p_1 和 p_2 上不局部同构。我们把 f' 称为 f 的一个**基本纤维扭曲**，p_1 和 p_2 为其中心，π 为其**扭曲基变换**，G 为**扭曲群**。

类似地，我们可以定义局部纤维化的**中心纤维扭曲**，它是整体的基本纤维扭曲的局部情形。

注意对于一对基本纤维扭曲 $f:S\longrightarrow C$ 和 $f':S'\longrightarrow C$，它们在扭曲基变换 $\pi:\widetilde{C}\longrightarrow C$ 下的拉回是同构的，而 π 至少关于其中的一个纤维化不是不变的。所以 f 与 f' 的不变量一般不相同，而其差值如

$$K^2_{S/C}-K^2_{S'/C}\ \text{以及}\ \chi_f-\chi_{f'}$$

仅与扭曲群和扭曲纤维的类型以及同构映射 α 的选取有关。因此从一个给定的纤维化出发，通过适当地选取扭曲纤维构造一列基本纤维扭曲，从而得到的新的纤维化的不变量可以在一个很大的范围内灵活变动。

定义 2.6.12　两个纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 和 $f':S'\longrightarrow C$ 称为相差一个（一般）**纤维扭曲**，或者说 f' 为 f 的一个（一般）**纤维扭曲**，如果存在一列纤维化 $f_i:S_i\longrightarrow C(i=0,\cdots,n)$，使得 $f=f_0$，

$f'=f_n$，并且对于 $i=1,\cdots,n$，f_i 和 f_{i-1} 相差一个基本纤维扭曲。

定义 2.6.13 纤维扭曲给纤维化的不变量带来的变化可以用类似于二次覆盖的 Persson 向量的扭曲向量清楚地表示出来。设 $f':S'\longrightarrow C$ 为 $f:S\longrightarrow C$ 的一个纤维扭曲。则我们定义这个纤维扭曲的扭曲向量为$(\chi_{f'}-\chi_f,\ K^2_{S'/C}-K^2_{S/C})$。

在局部情形，设 $f'_\Delta:S'_\Delta\longrightarrow\Delta$ 为局部纤维化 $f_\Delta:S_\Delta\longrightarrow\Delta$ 的一个中心纤维扭曲，$\pi:\tilde{\Delta}\longrightarrow\Delta$ 为 $n:1$ 扭曲基变换，$\tilde{f}_\Delta:\tilde{S}_\Delta\longrightarrow\tilde{\Delta}$ 为共同的拉回纤维化的一个爆发，使得诱导映射 $\Pi:\tilde{S}_\Delta\longrightarrow S_\Delta$ 和 $\Pi':\tilde{S}_\Delta\longrightarrow S'_\Delta$ 为态射。则和定理 2.6.3 的证明一样，

$$\mathscr{E}=\pi^*f_{\Delta*}\omega_{S_\Delta/\Delta}$$

和

$$\mathscr{E}'=\pi^*f'_{\Delta*}\omega_{S'_\Delta/\Delta}$$

都是 $\tilde{\mathscr{E}}=\tilde{f}_{\Delta*}\omega_{\tilde{S}_\Delta/\tilde{\Delta}}$ 的子层，且存在 $\tilde{S}_\Delta$ 中的垂直除子 D 和 D' 使得

$$\tilde{K}\equiv K-D\equiv K'-D',$$

这里 $\tilde{K}=K_{\tilde{S}_\Delta/\tilde{\Delta}}$，$K=\Pi^*K_{S_\Delta/\Delta}$，$K'=\Pi'^*K_{S'_\Delta/\Delta}$。我们定义这个中心纤维扭曲的，或者说是关于中心纤维的，局部扭曲向量为

$$\frac{1}{n}(\mathrm{ht}(\tilde{\mathscr{E}}/\mathscr{E})-\mathrm{ht}(\tilde{\mathscr{E}}/\mathscr{E}'),\ (K'+\tilde{K})D'-(K+\tilde{K})D).$$

简单的计算告诉我们，一般纤维扭曲的扭曲向量等于关于这个扭曲的所有中心纤维的局部扭曲向量之和。

§2.7 基 本 群

在这一节中，我们讨论一个曲面 S 的基本群 $\pi_1(S)$ 和 S 的一个纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 之间的关系。这里 $\pi_1(S)$ 有两种意义：一是拓扑基本群，在需要区别时也记作 $\pi_1^{\mathrm{top}}(S)$，它可以定义为 S 的泛覆盖空间到 S 的映射的 Galois 群，也可以定义为对于 S 上的任一基点 p，所有以 p 为起点和终点的道路(环路)的同伦等价类所构成的群。另一个是代数基本群 $\pi_1^{\mathrm{alg}}(S)$，它是 S 的所有有限次平展 Galois 覆盖的 Galois 群在由覆盖所诱导的群同态下的逆向极

限。因此 $\pi_1^{\text{alg}}(S)$ 是 $\pi_1^{\text{top}}(S)$ 的所有有限阶商群在核的包含关系所构成的半序下的极限，即所谓有限投射极限，从而由 $\pi_1^{\text{top}}(S)$ 所唯一确定。在这个意义下，确定一个曲面的拓扑基本群比确定它的代数基本群更为精确，但往往也更困难。

我们先来讨论拓扑基本群，为此设所有的 π_1 都是拓扑的，并用以基点 $p\in S$ 为端点的环路来代表 $\pi_1(S)$ 中的元素。我们假定包含 p 的纤维 F 是光滑的。注意 F 到 S 中的嵌入诱导一个同态

$$\eta:\pi_1(F)\longrightarrow\pi_1(S).$$

定义 2.7.1 η 的象记作 $\mathscr{V}_f$，称为 $\pi_1(S)$（关于 f）的垂直部分。

为了考察 $\mathscr{V}_f$ 的性质，设 $C'\subset C$ 为 f 的非临界点全体构成的开集，$S'=f^{-1}(C')$。则 f 诱导的纤维化 $f':S'\longrightarrow C'$ 是一个拓扑的纤维丛，所以我们有群同态的正合列

$$1\longrightarrow\pi_1(F)\xrightarrow{\eta'}\pi_1(S')\xrightarrow{\pi'}\pi_1(C')\longrightarrow 1.$$

特别地，$\pi_1(F)$ 在 $\pi_1(S')$ 中的象是一个正规子群。另一方面，S' 到 S 中的嵌入映射诱导 $\pi_1(S')$ 到 $\pi_1(S)$ 的一个同态

$$\iota:\pi_1(S')\longrightarrow\pi_1(S),$$

并且因为 S 是光滑曲面而 $S-S'$ 在 S 中的实余维数为二，S 中的任何环路都同伦等价于某个与 $S-S'$ 不相交的环路，故 ι 是个满射。我们有 $\eta=\iota\circ\eta'$，所以

引理 2.7.2 $\mathscr{V}_f$ 是 $\pi_1(S)$ 的正规子群。特别地，它的定义不依赖于光滑纤维 F 的选取。

注意如果除去 F 为光滑这一条件，则引理 2.7.2 不真。事实上，若 F 为一多重纤维，则 F 中总有一部分环路不同伦等价于完全含于邻近的任意一条光滑纤维中的环路。

定义 2.7.3 我们用 $\mathscr{H}_f$ 表示商群 $\pi_1(S)/\mathscr{V}_f$。因此有正合列

$$1\longrightarrow\mathscr{V}_f\longrightarrow\pi_1(S)\longrightarrow\mathscr{H}_f\longrightarrow 1.$$

由定义立即可得以下引理：

引理 2.7.4 设$\Pi:\tilde{S}\longrightarrow S$为一有限平展覆盖，对应于$\pi_1(S)$的子群$H$。$H$包含$\mathscr{V}_f$的充要条件是存在一个有限基变换$\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$，使得$\tilde{S}$为拉回纤维化$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$中的曲面。

这样的覆盖Π称为由基变换诱导的。对应地，覆盖Π称为垂直的，如果f的一条一般纤维在$\tilde{S}$中的原象是连通的。Π为垂直覆盖当且仅当它对应的$\pi_1(S)$的子群H到$\mathscr{H}_f$的投影是满射的。

下面确定$\mathscr{V}_f$和$\mathscr{H}_f$。因为$C-C'$由有限多个点组成，我们只需考虑关于一个点的局部情形。为此设$f_\Delta:S_\Delta\longrightarrow\Delta$为$f$中的一个局部纤维化。由引理 2.7.2，可设基点纤维F落在S_Δ中。设$p_1=f(F)\in\Delta$。设$\delta:\pi_1(F)\longrightarrow\pi_1(F_0)$为由从$S_\Delta$到中心纤维$F_0$的形变收缩（引理 2.1.12）所诱导的同态。显然η通过δ分解。

定义 2.7.5 若γ为F中的一个环路，它在$\pi_1(F)$中的类在δ下的象为零，则γ称为关于奇异纤维F_0的零化环路。γ为零化环路当且仅当$\delta(\gamma)$在F_0中同伦等价于零。

由定义可知，δ的核为$\pi_1(F)$中所有关于F_0的零化环路的类组成的子群。注意到这个核也是$\pi_1(F)$到$\pi_1(S'\cup F_0)$的同态的核，然后过渡到整体情形，立即可以得到以下定理。

定理 2.7.6 $\mathscr{V}_f=\pi_1(F)/H$，这里H是关于所有奇异纤维的零化环路所生成的子群。

推论 如果f含有单连通纤维，则$\mathscr{V}_f=\{1\}$。

另一方面，设λ为Δ中以$f(F)$为基点绕原点一周的一个小环路，我们可以取Λ为S_Δ中以p为基点的一个环路，使得$f(\Lambda)=\lambda$。用$[\lambda]$和$[\Lambda]$表示λ和Λ在π_1中的类。于是$[\Lambda]$和$\pi_1(F)$生成$\pi_1(S_\Delta)$。因为关于所有奇异纤维的这样的$[\lambda]$生成映射$\pi_1(C')\longrightarrow\pi_1(C)$的核，所以关于每条奇异纤维取一个这样的$\Lambda$，它们生成的正规子群包含$\pi_1(C')$到$\mathscr{H}_f$的同态的核。于是我们只要确定$[\Lambda]$在$\pi_1(S_\Delta)$中的象。

设v为F_0中的一个光滑点，n为F_0中过v的分支Γ在F_0

中的重数。设D为S_Δ中的一条既约曲线，它在v点与Γ横截相交，且只在v点与F_0相交。(这样的曲线一定存在；只要考虑S中的某个充分丰富的线性系，则其中可找到一个既约除子在v点与Γ横截相交。然后取Δ为这个除子含v的局部分支。)这时D到Δ的投影为一个n次覆盖，恰在v点有完全分歧。设Λ_n为λ在这个投影下的完全原象。则Λ_n到λ的投影为一n重平展覆盖，所以$[\Lambda_n]$与$[\Lambda]^n$模$\pi_1(F)$同余。但由于D是单连通的，Λ_n在D中(因而在S_Δ中)同伦等价于零，从而$[\Lambda]$在$\mathscr{H}_f$中的象L满足$L^n=1$。但L的阶与v的选取无关，所以有以下引理：

引理 2.7.7 $L^m=1$，这里m为F_0的重数。特别地，如果F_0不是多重纤维，$\pi_1(S_\Delta)$等于其垂直部分。

由此容易得到以下定理：

定理 2.7.8 设$F_1, \cdots, F_k$为纤维化$f:S\longrightarrow C$的所有多重纤维，m_i为F_i的重数，$p_i=f(F_i)$。设λ_i为$C'=C-p_1-\cdots-p_k$中绕p_i一周的一条环路，$[\lambda_i]$为它在$\pi_1(C')$中的象。则$\iota:\pi_1(S')\longrightarrow\pi_1(S)$诱导的投影$\pi_1(C')\longrightarrow\mathscr{H}_f$的核为由$[\lambda_1]^{m_1}, \cdots, [\lambda_k]^{m_k}$生成的子群。

注意$\mathscr{H}_f$到$\pi_1(C)$有一个自然投影，这个投影的核K恰为由$[\lambda_1], \cdots, [\lambda_k]$的象生成的子群。

证明 我们只要证明逆命题的成立，即对上述的某个局部邻域Δ，如果f_Δ的中心纤维F_0是m重的，且$\pi:\tilde{\Delta}\longrightarrow\Delta$为以原点为完全分歧点的$m$重覆盖，$\tilde{f}_D\cdot\tilde{S}_\Delta\longrightarrow\tilde{\Delta}$为$f_\Delta$关于$\pi$的拉回(定义 2.6.1)，则诱导覆盖$\Pi:\tilde{S}_\Delta\longrightarrow S_\Delta$是平展的。但这和定理 2.6.8 的证明中一样，可以由局部环的正规化直接算得。具体的计算留给读者。 ∎

因为曲线的基本群是相当清楚的，定理 2.7.8 说明$\mathscr{H}_f$也是很清楚的。相反，定理 2.7.6 则只是理论性的，实际的情形往往极为复杂。所以确定$\pi_1(S)$的关键在于其垂直部分。

由定理 2.7.6 和 2.7.8 可以推出下面的特例，它对于构造单连通曲面是十分有用的。

定理 2.7.9 设 $f:S\longrightarrow \mathbf{P}^1$ 为一纤维化，它最多有两条多重纤维，并且在恰有两条多重纤维的情形下，这两条纤维的重数互素。如果 f 有一条纤维是单连通的，则 S 是单连通曲面。

关于基本群和基变换的关系，有以下定理：

定理 2.7.10 设 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为一基变换，$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 为拉回纤维化，$\Pi:\tilde{S}\to S$ 为诱导覆盖。则 Π 诱导的同态把 $\mathscr{V}_{\tilde{f}}$ 满射地映到 $\mathscr{V}_f$ 上。当 π 为不变基变换时，这个映射是个同构。

证明 定理的前一个断言是 $\mathscr{V}_f$ 的定义的直接推论；后一个断言是局部的，所以只要证明：假定 π 是不变的，F 为 f 的一条纤维，$\tilde{F}$ 为 F 在 $\tilde{S}$ 中的一条原象纤维。则 Π 在 $\tilde{F}$ 上的限制诱导 $\pi_1(\tilde{F})$ 到 $\pi_1(F)$ 的同构。

我们采用定义 2.6.1 中的记号，不妨设 π 在 $f(F)$ 上有完全分歧，并设 F_2 为 $\tilde{F}$ 在 S_2 中的原象，$\varphi:F_2\longrightarrow F$ 为诱导态射。因为爆发诱导 π_1 的同构，我们只要证明 φ 诱导 π_1 的同构。设

$$\varphi=F_2\xrightarrow{\varphi_2}F_1\xrightarrow{\varphi_1}F_0\xrightarrow{\psi}F,$$

其中 φ_2、φ_1，ψ 分别为由 ρ_2，ρ_1，Π' 所诱导。

由定义 2.6.5 中的注，F 是既约的，所以 ψ 是拓扑同胚；由 F 的既约性还可推得 F 中的任一点在 F_1 中的完全原象都是连通的（习题），所以 φ_1 也是拓扑同胚；最后同样由 2.6.5 中的注，ρ_2 由有理二重点的爆发组成，但这样的爆发对 π_1 没有影响，所以 φ_2 诱导 π_1 的同构。 ▮

现在研究代数基本群的情形。

定义 2.7.11 设 H_f 为所有由有限基变换诱导的平展覆盖 $\Pi:\tilde{S}\longrightarrow S$ 的 Galois 群的有限投射极限。H_f 是 $\pi_1^{alg}(S)$ 的一个商群，且引理 2.7.4 说明 H_f 自然地成为 $\mathscr{H}_f$ 的有限投射极限。

设 V_f 为 $\pi_1^{alg}(S)$ 到 H_f 的投射的核，即与拓扑情形一样，有正合列

$$1\longrightarrow V_f\longrightarrow\pi_1^{alg}(S)\longrightarrow H_f\longrightarrow 1.$$

由定义可知对于任一光滑纤维 F，$\pi_1^{alg}(F)$ 到 $\pi_1^{alg}(S)$ 的诱导同态

通过 V_f 分解。

注 2.7.12 一个显然的事实是，如果 V_f 为有限群，则

$$q_f=0.$$

定理 2.7.13 设 $\mathscr{K}$ 为 $\mathscr{V}_f$ 的一个有限指标的正规子群。则存在 $\pi_1^{top}(S)$ 的一个有限指标的子群 $\mathscr{J}$ 使得 $\mathscr{J}\cap\mathscr{V}_f=\mathscr{K}$。于是 V_f 在自然对应关系下成为 $\mathscr{V}_f$ 的有限投射极限。

证明 设 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为任一有限基变换，$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 为拉回纤维化。则诱导映射 $\Pi:\tilde{S}\dashrightarrow S$ 给出从 $\pi_1^{top}(\tilde{S})$ 到 $\pi_1^{top}(S)$ 的一个同态，它的象是 $\pi_1^{top}(S)$ 中的一个有限阶的子群(定理 A 3.1 的简单推论)。这个注使得我们可以在模了一个适当的基变换后再来证明定理，特别地，不失一般性，可设 f 有一个截面 D (引理 2.6.2)。这时 f 没有多重纤维，且 D 到 S 中的嵌入诱导

$$\pi_1^{top}(D)\cong\pi_1^{top}(C)$$

到 $\mathscr{H}_f$ 的一个同构。

设 F 为 f 的一条光滑纤维，并设 Σ 为 $\mathscr{V}_f$ 中所有指标为 n 的正规子群所成的集合，这里 $n=[\mathscr{V}_f:\mathscr{K}]$。则 $\pi_1^{top}(S)$ 通过共轭自然地作用于 Σ 上。设 J 为这个作用的核。由于 $\mathscr{V}_f$ 是有限生成的，Σ 是有限集(引理 A 3.3)，因此 $[\pi_1^{top}(S):J]<\infty$。显然 $J\supset\mathscr{V}_f$，所以 J 所对应的 S 的平展覆盖 $\Pi:\tilde{S}\longrightarrow S$ 是由基变换诱导的。

现在用 $\tilde{S}$ 替换 S，我们可以假设 $\mathscr{K}$ 是 $\pi_1^{top}(S)$ 的正规子群。这时 $\mathscr{K}$ 与 $\pi_1^{top}(D)$ 生成的 $\pi_1^{top}(S)$ 的子群满足定理的要求。 ∎

定理 2.7.13 说明了所有有关拓扑基本群的有限商的垂直性质在代数情形也同样成立。

§ 2.8 单 值

因为在纤维化的研究中会出现很多类似于 Picard-Lefschetz 的单值概念，为了以后的讨论方便，我们把这个概念推广到一个更一般的情形。

定义 2.8.1 设 C 为一射影光滑曲线，C' 为 C 中的一个连通

开集，$\mathscr{E}$ 为 C' 上的一个拓扑纤维丛，它有一个离散的结构群 G。则存在一个自然的群同态 $\eta_{\mathscr{E}}:\pi_1(C')\longrightarrow G$，称为关于 $\mathscr{E}$ 的单值同态，如下：

在 C' 中取一点 p 作为基点，对于 C' 中的任一条连接 p 和另一点 q 的道路 $\Gamma:[0,1]\longrightarrow C'$，$\mathscr{E}$ 的局部常性说明 $\Gamma^*(\mathscr{E})$ 是平凡的，因此它决定了 $\mathscr{E}$ 的茎 $\mathscr{E}_p$ 到 $\mathscr{E}_q$ 的一个同构映射。由结构群的离散性，这个同构是由 Γ 的同伦类唯一确定的。特别地，把 $\pi_1(C')$ 表示成 C' 中以 p 为基点的环路的同伦等价类全体，对任一 $\gamma\in\pi_1(C')$ 存在对应的一条环路 $\Gamma\subset C'$，因而决定了一个自同构 $\alpha_\Gamma\in\mathrm{Aut}(\mathscr{E}_p)=G$。定义 $\eta_{\mathscr{E}}(\gamma)=\alpha_\Gamma$，它与 p 和 Γ 的选取无关。

设 $K_{\mathscr{E}}$ 为 $\eta_{\mathscr{E}}$ 的核。$\mathscr{E}$ 是平凡的当且仅当 $K_{\mathscr{E}}=\pi_1(C')$。特别当 G 为有限群时，$K_{\mathscr{E}}$ 在 $\pi_1(C')$ 中的指标有限。这时设 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C'$ 为对应于 $\pi_1(C')/K_{\mathscr{E}}$ 的平展 Galois 覆盖，则 $\mathscr{E}$ 在 π 下的拉回是平凡的。

我们经常要考虑的是局部情形的单值同态：设 p_0 为 C 中一点，D 为 p_0 的一个小邻域，$C'=D-p_0\cong\Delta^*$。则 $\pi_1(C')$ 由顺时针绕 p_0 一周的一个小环路 Γ 生成，所以 $\eta_{\mathscr{E}}$ 由 Γ 的象 α_Γ 所唯一确定。这时 α_Γ 也称为关于 p_0 的局部单值。

在我们的实际应用中，通常 $\mathscr{E}$ 是由包含 C' 的一个开集 C''（它是 C 本身或是 Δ）上的纤维化所决定的一个纤维丛，并且对于 C'' 的任一基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C''$，$\mathscr{E}$ 在 $\tilde{C}$ 上的原象等于拉回纤维化所决定的纤维丛。

关于由纤维化决定的单值，首先有 Picard-Lefschetz 类型的单值：

定义 2.6.2 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一纤维化，Σ 为 f 的临界点全体，$C'=C-\Sigma$，$S'=f^{-1}(C')$，$f':S'\longrightarrow C'$ 为诱导纤维化。因为 f' 是拓扑纤维丛，$\mathscr{E}=R^1f'_*(\mathbf{Z})$ 为 C' 上的局部常群层，其茎等于 $H^1(F,\mathbf{Z})$，这里 F 为 f' 的纤维。因而 $\mathscr{E}$ 也可以看成 C' 上的以 $\mathrm{Aut}(H^1(F,\mathbf{Z}))$ 为结构群的拓扑纤维丛。$\mathscr{E}$ 的对偶层 $\mathscr{E}^\vee$ 也是 C' 上的局部常群层，其茎为 $H_1(F,\mathbf{Z})$。

由定义，关于纤维化 f 的 Picard-Lefschetz 单值为关于 $\mathscr{E}$ 的单值同态

$$\eta^{e}:\pi_1(C')\longrightarrow \mathrm{Aut}(H^1(F, \mathbf{Z})),$$

或关于 $\mathscr{E}^{\vee}$ 的同态

$$\eta_{e}:\pi_1(C')\longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1(F, \mathbf{Z})).$$

注意，如果我们选定 $H^1(F, \mathbf{Z})$ 的一组标准基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g$，使得 $\alpha_i\alpha_j=\beta_i\beta_j=0$，$\alpha_i\beta_j=\delta_{ij}$，则这组基确定了 $\mathrm{Aut}(H^1(F, \mathbf{Z}))$ 到 $Sp(g, \mathbf{Z})$ 的一个同构。

在局部的情形，设 F_0 为 f 的一条奇异纤维，Δ 为 $p_0=f(F_0)$ 的一个邻域，$\Delta^*=\Delta-p_0$，设 Γ 为 Δ^* 中绕中心点 p_0 一周的一个环路。则关于 Γ 的单值 $\alpha_\Gamma\in \mathrm{Aut}(H_1(F, \mathbf{Z}))$ 称为纤维 F_0 的 Picard-Lefschetz 单值，对应的矩阵为 F_0 的单值矩阵。局部单值在很大的程度上反映了中心纤维 F_0 的特性。

下面研究如何计算具体纤维的单值。关于这些计算的进一步的细节，请读者参考 [Le]、[PS] 或 [La]。这里总设纤维化是相对极小的。

当中心纤维 F_0 为半稳定时，它的局部单值都是由 F_0 上的二重点引入的。设 p 为这样一个二重点，它在解析的意义下有一个局部方程 $t=x^2+y^2$，其中 x、y 为 $\mathcal{O}_{p,S}$ 的生成元，其零点集分别是过 p 的两个局部分支，而 t 是 $p_0=f(F_0)$ 的局部参数。对一个充分小的正数 ε，满足 $|x|^2+|y|^2<2\varepsilon$ 的点构成 p 的一个邻域 B_p，而对于 $c\in\mathbf{C}$，$0<|c|<\varepsilon$，B_p 中满足 $x^2+y^2=c$ 的点是 C 上满足 $t=c$ 的点 p_c 上的纤维 F_c 与 B_p 的交，它微分同胚于一个圆筒。每个这样的圆筒中满足 $\arg(x^2)=\arg(y^2)=\arg(c)$ 的点形成一个环路 $\mathscr{C}_c$。设 Δ 为 $|t|<\varepsilon$ 所定义的 p_0 的邻域，

$$S_\Delta=f^{-1}(\Delta),$$

则我们有一个以 $|t|$ 为 Morse 函数的形变收缩 $\rho:S_\Delta\longrightarrow F_0$，它在 S_Δ 关于所有 F_0 的二重点的 ε 邻域的余集上诱导纤维间的微分同胚，把 B_p 收缩到 $B_p\cap F_0$，把环路 $\mathscr{C}_c$ 收缩到点 p，且诱导 $F_c\cap B_p-\mathscr{C}_c$ 与 $F_0\cap B_p-\{p\}$ 的微分同胚。F_c 中满足这个条件的

环路称为关于 p 的零化环路。固定一个充分邻近 F_0 的纤维 $F=F_c$，F 中所有关于 p 的零化环路都同调，所以唯一地对应于 $H_1(F, \mathbf{Z})$ 中的一个元 e_p。现在 Picard 和 Lefschetz 的经典公式告诉我们，关于 F_0 的单值

$$\alpha: H_1(F, \mathbf{Z})\longrightarrow H_1(F, \mathbf{Z})$$

由公式

$$\alpha(a)=a-\sum_p (a\cdot e_p)e_p \tag{2.6}$$

所定义，其中求和为对 F_0 的所有二重点 p 进行。

注意 F_0 的零化环路之间的相交数都是零，所以我们可以选取 $H^1(F, \mathbf{Z})$ 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g$，使得 β_i 的对偶元与所有零化环路相交都为零。于是在这组基下，单值矩阵形如 $\begin{pmatrix} I_g & B \\ 0 & I_g \end{pmatrix}$，其中 B 是一个 $g\times g$ 的方阵，I_g 为 g 阶单位阵。特别地，我们看到半稳定纤维的单值是幺幂的。

例 2.6.3　例如，如果 p 是 F_0 的一个分离二重点(即 F_0-p 不连通)，则关于它的零化环路是 F 的分离环路。因为分离环路和 F 的任意环路相交数都是零，由(2.6)知分离二重点对 F_0 的单值不起作用。如果 F_0 的所有二重点都是分离的，它的单值是平凡的。

另一方面，假设 F_0 的所有不分离二重点都在一个 $\tilde{A}_{n-1}$ 型 (-2)-曲线组上（我们把 $\tilde{A}_0$ 型理解为一个二重点），如图 2.3 所示。



图 2.3　$\tilde{A}_{n-1}$ 型不分离二重点组

则 F_0 的 n 个不分离二重点的零化环路都是同调的。如果把 β_1 取作这个同调等价类的对偶，所得的单值矩阵在第 1 行第 $g+1$ 列为 n，其余非对角元素都是 0。反之，对局部方程作直接的计算，不难证明对应于这样一个单值矩阵的半稳定纤维的不分离二重点一定是 $\tilde{A}_{n-1}$ 型的。

现在假设中心纤维 F_0 不是半稳定的。根据稳定约化定理，存在 n:1 基变换 $\pi:\tilde{\Delta}\longrightarrow\Delta$ 使得拉回纤维化 $\tilde{f}_\Delta$ 的中心纤维 $\tilde{F}$ 半稳定。取定充分接近 F_0 的一条纤维 F，仍用 F 记它在 π 下的一条拉回纤维，并取定 $H^1(F,\mathbf{Z})$ 的一组标准基。设 A_0 和 $\tilde{A}$ 分别为在这组标准基下 F_0 和 $\tilde{F}$ 的单值矩阵。显然 $\tilde{A}=A_0^n$，这里 $n\geqslant 2$ 是 π 的次数。

因为 π 是循环映射，诱导映射 $\Pi:\tilde{S}_\Delta--\to S_\Delta$ 也是 Galois 的，因此由相对极小模型的唯一性，Π 诱导 $\tilde{S}_\Delta$ 的一个 n 阶自同构 α。

引理 2.8.4 1) α 要么诱导 $\tilde{F}$ 的对偶图 $\tilde{G}$ 的非平凡自同构，要么在 $\tilde{F}$ 的某个算术亏格>0 的不可约分支上诱导一个非平凡自同构。

2) 当 $n=2$ 时，α 的不动点 p 要么是 $\tilde{F}$ 上的光滑点，要么是 $\tilde{F}$ 中一条全由不动点组成的分支中的一点。

证明 1) 事实上，否则，$\tilde{G}$ 是 F_0 的某个爆发的对偶图 G_0 的一个收缩(因而 $b_1(G_0)\geqslant b_1(\tilde{G})$)，且若 g_0 和 $\tilde{g}$ 分别为 F_0 和 $\tilde{F}$ 的正规化中不可约分支的几何亏格之和，$g_0\geqslant\tilde{g}$。于是由引理 2.3.2 以及 $b_1(\tilde{G})+\tilde{g}=g$，$F_0$ 是既约的，且 $b_1(G_0)=b_1(\tilde{G})$，$g_0=\tilde{g}$，从中不难看出 F_0 的奇点都是普通二重点，与 F_0 非半稳定的假设相矛盾。

2) 若 p 为 $\tilde{F}$ 的二重点，则它有局部方程 $u=xy$，这里 x，y 为 $\tilde{F}$ 的局部曲线的定义方程，u 为 $\tilde{\Delta}$ 的局部参数。因为 $\alpha(u)=-u$，我们必有 $\alpha(x)=x$ 或 $\alpha(y)=y$。 ∎

由此引理之 1) 推出，$\tilde{F}$ 中存在一个不同调于 0 的环路 $\mathscr{C}$，使得要么 $\alpha(\mathscr{C})=-\mathscr{C}$，要么 $\alpha(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$，其中 $\mathscr{C}'$ 与 $\mathscr{C}$ 不同调，因

为$\mathscr{C}$是F中的某个不同调于0的环路$\mathscr{C}''$在上述形变收缩下的象，设c为$\mathscr{C}''$在$H_1(F, \mathbf{Z})$中的象的对偶，则要么$A_0(c)=-c$，要么$A_0(c)=c''$，其中$c''\neq c$。这说明A_0不可能是么幂的。从而证明了下面的定理。

定理 2.8.5 设$f: S\longrightarrow C$为一相对极小纤维化，F_0为f的一条纤维。F_0为半稳定纤维当且仅当它的局部单值矩阵是么幂的。

下面是比 Picard-Lefschetz 单值更简单的一种单值。

例 2.8.6 设$f:S\longrightarrow C$为一纤维化，D为S中不含垂直分支的一个既约除子，$\Sigma\subset C$为D到C的投影的分枝轨迹，

$$C'=C-\Sigma.$$

则$D'=D\cap f^{-1}(C')$可以看成C'上的一个拓扑纤维丛，因而它定义了关于f的一个单值。

注意：D的不可约分支都是f的截而当且仅当D的这个单值是平凡的。由此可以得到引理2.6.2的一个新的证明。

我们还可以定义由两个纤维化定义的单值。在这一节的以后部分我们总假设纤维化的亏格$g\geqslant 1$，并且在$g=1$的时候，假设所考虑的纤维化有一条固定的截面。注意任给一个代数的椭圆纤维化，总可以找到一个 Galois 基变换使得拉回纤维化有截面。

定义 2.8.7 两个纤维化$f:S\longrightarrow C$和$f':S'\longrightarrow C$称为相伴的，如果存在一个平展基变换$\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$，使得$f$和$f'$关于$\pi$的拉回是同构的。

除了相对不规则性外，相伴的纤维化具有相同的相对不变量。

定义 2.8.8 两个纤维化$f:S\longrightarrow C$和$f':S'\longrightarrow C$称为等模的，如果对于任一点$p\in C$，使得$f^{-1}(p)$和$f'^{-1}(p)$都是光滑纤维，则$f^{-1}(p)$和$f'^{-1}(p)$同构。一个等价的定义是f和f'的模映射是一致的。等模的纤维化最多在C的有限多个点上非局部同构。

给定两个等模纤维化$f:S\longrightarrow C$和$f':S'\longrightarrow C$，我们可以

构造C上的一个层$\mathscr{G}$，使得对于C的每个开集U，$\mathscr{G}_U$为所有从$f^{-1}(U)$到$f'^{-1}(U)$的U-同构全体（若$g>1$），或所有把给定的截面映到截面的这样的U-同构全体（若$g=1$）。于是因为一般纤维的自同构群有限，存在C的一个Zariski开集C_0，使得f和f'限制在C_0上都是光滑的，$\mathscr{G}$限制在C_0上为一局部常层，因此是以$G\cong \mathrm{Aut}(F)$为结构群的一个拓扑纤维丛。这里F为f'的一条一般纤维。关于$\mathscr{G}$的单值同态$\eta:\pi_1(C_0)\longrightarrow G$称为关于这对等模纤维化的**整体等模单值**，$\eta$的象称为**等模单值群**。同样也可以定义关于两个等模局部纤维化的**局部等模单值**，注意，局部等模单值群一定是循环群。

如果两个等模纤维化的等模单值是平凡的，则它们双有理等价。特别地，如果它们都是相对极小的，它们同构。

如果一个纤维化$f:S\longrightarrow C$的模映射的象是一个点，则从上面的讨论可以看出f等模于一个平凡纤维化，这样的纤维化称为**常模的**。相反的情形称为**变模的**。

另外，如果f和f'处处局部同构，则单值η决定了$\pi_1(C)$的一个商群，它对应于底曲线C的一个平展Galois覆盖$\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$。现在$f$和$f'$关于$\pi$的拉回$\tilde{f}$、$\tilde{f}'$也是等模的，且具有平凡的单值。这等价于$\tilde{f}$与$\tilde{f}'$同构。也就是说，两个纤维化相伴当且仅当它们等模且处处局部同构。

另外，相差一个纤维扭曲的纤维化也是等模的。反之，有以下定理。

定理 2.8.9 设$f:S\longrightarrow C$与$f':S'\longrightarrow C$为两个等模纤维化。则存在一列等模纤维化$f_i:S_i\longrightarrow C$，$i=0,\cdots,n$，其中$f_0=f$，对$i=1,\cdots,n$，f_i是f_{i-1}的基本纤维扭曲，且f_n和f'最多在C的一个点上非局部同构。

当f和f'的整体单值群G_m是阿贝尔群时，f_n和f'相伴。

证明 我们对C中使得f和f'不局部同构的点的个数k归纳。设$p_1,\cdots,p_k(k\geq 2)$为这些点。设$G=\langle\gamma\rangle$为关于点p_1的等模单值群，这可以作一个f的关于群G的基本纤维扭曲$f_1:S_1$

$\longrightarrow C$，它以 p_1 和 p_2 为中心，使得在 p_1 上 f_1 与 f' 局部同构。现在 f_1 和 f' 等模，且 C 中使它们非局部同构的点是 $\{p_2, \cdots, p_k\}$ 的一个子集，且 f_1 与 f' 的整体等模单值群是 G_m 的一个子群。

剩下只需证明当 G_m 为阿贝尔群时，f 和 f' 不可能恰在一个点 p 上非局部同构。事实上，设 $C_0 = C - p$，γ 为绕 p 一周的一条局部环路在 $\pi_1(C_0)$ 中的类。因为 G_m 交换，f 与 f' 的整体等模单值 $\eta: \pi_1(C_0) \longrightarrow G_m$ 的核包含 $\pi_1(C_0)$ 的交换子群 H。但 γ 在 H 中，所以 η 通过自然同态 $\pi_1(C_0) \longrightarrow \pi_1(C)$ 分解，但这意味着 γ 在 G_m 中的象是单位，或者说 f 和 f' 在 p 点局部同构。 ∎

附记

$K_{S/C}$ 的数值正性(定理 2.4.10 的第二部分)首先由 Arakelov 在半稳定纤维化的情形证明 [Ara]，并由 Beauville 推广到一般情形[B 5]。

第 3 章

椭圆纤维化

除了曲面论中经典的直纹理论以外，椭圆纤维化就是最简单的曲面纤维化了。曲面纤维化的研究也可以认为是从小平邦彦关于椭圆纤维化的研究开始的。椭圆和非椭圆的纤维化最大的不同是：带有椭圆纤维化的曲面可能不是代数曲面，面带有非椭圆纤维化的曲面一定是代数的。由于本书的着眼点是代数曲面的纤维化，这里不讨论非代数的情形。对这种情形有兴趣的读者可以参考小平邦彦的原始文献[Ko1]、[Ko2]或[BPV]。

§3.1 奇异纤维的小平分类

我们考察局部的情形：设 $f_\Delta:S_\Delta\longrightarrow\Delta$ 为一相对极小局部椭圆纤维化，F_0 为中心纤维。首先设 F_0 不是多重纤维。

引理 3.1.1 若 F_0 可约，则它的每个不可约分支都是(-2)-曲线。

证明 设 Γ 为 F_0 的一个不可约分支，$K=K_{S_\Delta/\Delta}$。由引理 2.1.10，$p_a(\Gamma)=0$，所以 $\Gamma\cong\mathbf{P}^1$。另一方面，因为 $KF=0$，且对 F 的任一不可约分支 Γ' 都有 $K\Gamma'\geqslant 0$（引理 2.1.7），我们得到 $K\Gamma=0$，从而 $\Gamma^2=-2$。 ∎

定理 3.1.2 F_0 必为下表所示的纤维之一（我们采用小平邦彦[Ko1]的原始记号）：

型	组合特性	单值矩阵	型	组合特性	单值矩阵
I_0	非奇异椭圆曲线	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	I_0^*	$\tilde{D}_4$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
I_1	带一个普通二重点的有理曲线	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$			
$I_b(b\geqslant 2)$	$\tilde{A}_{b-1}$	$\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}$	$I_b^*(b\geqslant 1)$	$\tilde{D}_{b+4}$	$\begin{pmatrix}-1&-b\\0&-1\end{pmatrix}$
II	带一个尖点的有理曲线	$\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	II^*	$\tilde{E}_8$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$
III	相切的两条(-2)-曲线	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	III^*	$\tilde{E}_7$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$
IV	横截交于一点的三条(-2)-曲线	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$	IV^*	$\tilde{E}_6$	$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$

证明 我们先对半稳定的情形进行分类：I_0型的纤维不需要任何说明。所以设F_0奇异。

如果F_0不可约，则F_0上只能有一个不分离二重点，此即型I_1；其单值是例2.8.3的特例。

如果F_0可约，则由引理3.1.1，它的每个分支都是与其余分支相交于两点的(-2)-曲线，因此复式对偶图为一个圈。于是得到型I_b，这里b是分支的个数。同样由例2.8.3可得其单值矩阵。这些包含了所有的半稳定情形。

现在设F_0非半稳定，因此由稳定约化定理，存在$n:1$基变换$\pi:\tilde{\Delta}\longrightarrow\Delta$使得拉回纤维化的中心纤维$\tilde{F}$为$I_b$型，$b\geqslant 0$，以及$n$阶自同构$\alpha\in\mathrm{Aut}(\tilde{S}_\Delta)$使得$S_\Delta$双有理等价于$\tilde{S}_\Delta/\alpha$。不妨设$\pi$为这样的基变换中次数最小者。

F_0由$\tilde{F}$和α唯一确定。因为F_0不是多重纤维，α在$\tilde{F}$上一定有不动点。因此由引理2.8.4的1)，$b\neq 1$，且当$b>1$时$n=2$，α诱导$\tilde{F}$的对偶图的一个对折。再由这个引理的2)，b一定是偶数，且α恰有四个光滑不动点，分别落在这个对折的对称中心对应的两个分支上。这四个点在$\tilde{S}_\Delta/\alpha$中的象为四个A_1型的有理二重点，将其解消即得S_Δ。因此得到型$I_{b/2}^*(b>1)$。

剩下只有$\tilde{F}$为光滑椭圆曲线的可能性，这时$n=2, 3, 4$或6。且当$n=2$时α为一对合，恰有四个不动点，所以和半稳定的情形一样，我们得到I_0^*型纤维。

在以上两种情形，因为满足 $A^2=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的非幺幂矩阵 A 只有 $-\begin{pmatrix}1 & b/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，所以有有关单值矩阵的表示。

在余下的情形，设 p 为一不动点，则 α 在 p 的切空间 T_p 上的表示有两个特征值 (ρ, ρ^k)，这里 ρ 是 n 的一个本原单位根。由 n 的极小性得 $k=\pm1$。并且因为 α 由 $\tilde{F}$ 的切空间的一个固定角度的旋转所诱导，α 的所有不动点都有相同的 k 值。

若 $k=1$，则我们可以爆发 p，得到的例外曲线 E 由诱导自同构 $\tilde{\alpha}$ 的不动点组成，所以商曲面在 E 的象周围是光滑的。由此可以算出 p 在 S_Δ 中的象的解消是一条 $(-n)$-曲线。

若 $k=-1$，则设 x、y 为对应于上述特征值的局部参数，p 在 S_Δ 中的象的局部环由 $t_1=x^n$，$t_2=y^n$，$t_3=xy$ 生成，满足 $t_1t_2=t_3^n$。因此这是一个 A_{n-1} 型的有理二重点（参见 [BPV]，p.87），它的解消是 $n-1$ 条 (-2)-曲线组成的链。

现在当 $n=3$ 时，α 有三个不动点。若 $k=1$，则 $\tilde{F}/\alpha$ 在奇点解消后含有 (-1)-曲线。收缩到极小模型，便得到 IV 型纤维；若 $k=-1$，$\tilde{F}/\alpha$ 的解消是极小的，因此为 IV* 型。

当 $n=4$ 时，α 有两个不动点，α^2 另有两个不动点。因此若 $k=1$，我们得到 III 型，否则，得到 III* 型纤维。

最后当 $n=6$ 时，α 有一个不动点，α^2 另有两个，α^3 另有三个。故当 $k=1$ 时为 II 型，否则，为 II* 型。

后面这几种情形的单值矩阵可以通过在 $H_1(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ 中取适当的基直接算出，具体的计算留给读者。 ▌

推论 1　椭圆纤维化中的单重奇异纤维由其 Picard-Lefschetz 单值唯一决定。

推论 2　椭圆纤维化中的单重奇异纤维为半稳定当且仅当它不是单连通的。

现在我们设中心纤维 F_0 为 m 重多重纤维：$F_0=mD$。考虑 f_Δ 在 $m:1$ 基变换 $\pi:\tilde{\Delta}\longrightarrow\Delta$ 下的拉回的中心纤维 $\tilde{F}$。由引理

2.6.9，F_0 不是单连通的，因此 $\tilde{F}$ 也不是单连通的，所以必为 I_c 型，$c\geqslant 0$。并且 $\tilde{F}$ 到 F_0 有一个诱导的 m 阶平展循环覆盖，所以 $m|c$，且 D 为 I_b 型的曲线组合，这里 $b=c/m$。

定义 3.1.3 多重纤维 F_0 称为 ${}_mI_b$ 型的($b\geqslant 0$)。

因为平移在纤维的 H^1 上的诱导作用是平凡的，有以下命题：

命题 3.1.4 ${}_mI_b$ 型的纤维和 I_b 型纤维具有相同的局部单值矩阵。

注 3.1.5 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维化，$j:C\longrightarrow \mathscr{M}_1$ 为 f 的模映射。$\mathscr{M}_1$ 中有唯一的一个点，即尖点 ∞，它所对应的稳定曲线是奇异的。由上面的讨论可以知道，如果 $j(p)=\infty$，则

$$F=f^{-1}(p)$$

为 ${}_mI_b$ 或 I_b^* 型的纤维。特别地，如果 f 是变模纤维化，则 $j^{-1}(\infty)$ 非空，所以这时 f 一定有 ${}_mI_b$ 或 I_b^* 型纤维。

例 3.1.6 椭圆纤维化可以有任意重数的多重纤维。

设 G 为一 $n\geqslant 2$ 阶循环群，E 为一条椭圆曲线。固定 G 在 E 上的一个自由忠实作用（平移）。另外，G 在 $\mathbf{P}^1$ 上也有一个忠实作用，它有两个不动点 p、q。这两个作用诱导 G 在 $\tilde{S}=E\times\mathbf{P}^1$ 上的一个自由作用，使得商 $S=\tilde{S}/G$ 为光滑曲面，并且 $\tilde{S}$ 的第二个投影诱导一个椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C=\mathbf{P}^1/G$。容易看出，$p$ 和 q 在 C 中的象上商的两条纤维都是 n 重的光滑纤维。

§3.2 典范除子和不变量

在这一节中我们考虑整体的情形，设 $f:S\longrightarrow C$ 为一相对极小的椭圆纤维化。

引理 3.2.1 $K_{S/C}^2=0$，且 $K_{S/C}$ 限制在任一单重纤维上都是平凡的。

证明 因为 $f_*\omega_{S/C}$ 是 C 上的可逆层，存在 C 上的一个充分丰富除子 D，使得 $|K_{S/C}+f^*D|$ 中有一有效除子 H。因为对于 f 的纤维 F 有 $HF=0$，H 全由垂直分支组成。由此由 Zariski 引

理，$K_{S/C}^2=H^2\leqslant 0$。另一方面，$K_{S/C}$ 的数值正性(定理 2.4.10)导致 $K_{S/C}^2\geqslant 0$，所以 $H^2=K_{S/C}^2=0$，而且 H 在每条纤维 F 上的限制都是 F 的一个倍数。当 F 为单重纤维时，该倍数为整数倍，所以由引理 2.1.2，$K_{S/C}$ 在 F 上的限制是平凡的。 ∎

推论 $12\chi(\mathcal{O}_S)=12\chi_f=c_2(S)=\Sigma_{F'}\chi_{top}(F')$，其中求和号为对 f 的所有奇异纤维进行。

引理 3.2.2 设 $F=nD$ 为 f 的一条 $n>1$ 重纤维。则

$$K_{S/C}|_D=(n-1)D|_D.$$

证明 引理 3.2.1 的证明实际上已经说明 $K_{S/C}|_D=mD|_D$，对于某个整数 m。由于 $nD|_D=F|_D$ 是平凡的，我们可设 $0\leqslant m\leqslant n-1$。另外由相伴公式，$(m+1)D|_D=K_{S/C}|_D+D|_D=K_D$。但 D 是一条 I_b 型($b\geqslant 0$)的曲线，所以直接可以看出 K_D 是平凡的。故 $(m+1)D|_D\equiv 0$，然后由引理 2.4.3 可知 n 整除 $m+1$。 ∎

定理 3.2.3 设 $\{F_i=m_iD_i\}$ $(i=1,\cdots,k)$ 为 f 的多重纤维集合，其中 $m_i>1$ 为 F_i 的重数，

则
$$\omega_{S/C}=f^*f_*\omega_{S/C}\otimes\prod_{i=1}^{k}\mathcal{O}_S((m_i-1)D_i),$$

换句话说，若 D 为 C 上对应于 $f_*\omega_{S/C}$ 的一个除子，F 为 f 的一条一般纤维，

$$K_{S/C}\equiv f^*D+\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)D_i\sim\left(\chi(\mathcal{O}_S)+\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\right)F.$$

证明 对于 C 上的任一可逆层 $\mathscr{L}$，我们有一个典范的相伴映射

$$f^*(f_*\omega_{S/C}\otimes\mathscr{L})\longrightarrow\omega_{S/C}\otimes f^*\mathscr{L},$$

由于两边都是可逆层，这说明

$$\omega_{S/C}\otimes f^*\mathscr{L}=f^*(f_*\omega_{S/C}\otimes\mathscr{L})\otimes\mathscr{M},$$

其中 $\mathscr{M}=\mathcal{O}_S(E)$ 为关于一有效除子 E 的可逆层。取 $\mathscr{L}$ 充分丰富可知 E 不含 f 的任何纤维，故由引理 3.2.1，它一定包含在所有多重纤维的并中，因此由于

$$E^2=0,\quad E=\sum_{i=1}^{k}n_iD_i,$$

这里$0\leqslant n_i<m_i$。再由引理 2.4.3 和 3.2.2，$n_i=m_i-1$。 ▮

由此和引理 3.2.1 的推论以及 §1.4 中的曲面分类表，立即可以得到下面的椭圆曲面小平维数分类表：

定理 3.2.4 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一相对极小椭圆纤维化，$F_1,\cdots,F_k$ 为 f 的多重纤维，重数分别为 $m_1\leqslant\cdots\leqslant m_k$。设 $b=g(C)$。则：

S 为双有理直纹曲面当且仅当 $b=0$，且以下情形之一成立：

1) $\chi(\mathcal{O}_S)=0$（即 f 的奇异纤维都是光滑多重纤维），$k=0$ 或 $k=2$，$m_1=m_2$。这时 S 为极小椭圆直纹面；

2) $\chi(\mathcal{O}_S)=1$，$k\leqslant 1$，S 为有理曲面。

$\kappa(S)=0$ 当且仅当下列情形之一：

1) $b=\chi(\mathcal{O}_S)=0$，且 $k=3$，$m_1=m_2=m_3=3$，或 $k=3$，$m_1=2$，$m_2=m_3=4$，或 $k=3$，$m_1=2$，$m_2=3$，$m_3=6$，或 $k=4$，$m_1=m_2=m_3=m_4=2$。这时 $p_g(S)=0$，$q(S)=1$，故 S 为双椭圆曲面；

2) $b=0$，$\chi(\mathcal{O}_S)=1$，$k=2$，$m_1=m_2=2$。这时 S 为Enriques 曲面；

3) $b=0$，$\chi(\mathcal{O}_S)=2$，$k=0$，这时 S 为 K3 曲面；

4) $b=1$，$\chi(\mathcal{O}_S)=0$，$k=0$，这时 S 为阿贝尔曲面。

在所有其它情形，均有 $\kappa(S)=1$。

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
K_S&\sim\left(\chi(\mathcal{O}_S)+2b-2+\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\right)F\\
&\geqslant\left(\chi(\mathcal{O}_S)+2b-2+\frac{k}{2}\right)F
\end{aligned}
$$

且 $p_g(S)=h^0(f_*\omega_{S/C}\otimes\omega_C)$，$q(S)=b+h^1(f_*\omega_{S/C}\otimes\omega_C)$，唯一需要说明的是在双有理直纹面的第一种情形，如果 $k>0$，则一定 $k=2$ 且 $m_1=m_2$。

事实上，这时 S 有一极小直纹 $\rho:S\longrightarrow E$，到一条椭圆曲线 E。设 R 为 ρ 的任意一条纤维。f 的每条纤维到 E 的投影都是平

展的，所以 f 诱导的覆盖 $\varphi:R\longrightarrow C\cong\mathbf{P}^1$ 仅在 f 的临界点上有分歧，且 φ 在临界点的每个原象上的分歧指数都恰好是 f 的对应纤维的重数。由此立即可排除 $k=1$ 的可能性，且当 $k=2$ 时，由 Hurwitz 公式知 φ 在两个点上必须有完全分歧，故

$$m_1=m_2=\deg\varphi.$$

另一方面，前面的公式说明 $k\leqslant 3$ 且如果 $k=3$，则或者 $m_1=m_2=2$, $m_3=n$，或者 $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3\leqslant 5$。根据定理 A3.6，φ 分别为对应于一个二面体群或多面体群 G 的 Galois 覆盖。设 $\tilde{C}=R$ 且 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为由 φ 决定的基变换。则拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 为平凡的，且诱导覆盖 $\Pi:\tilde{S}\longrightarrow S$ 也是对应于 G 的 Galois 平展覆盖。我们有 $\tilde{S}\cong\tilde{C}\times\tilde{E}$，这里 $\tilde{E}$ 实际上是 $\tilde{S}$ 上由 ρ 诱导的直纹的底曲线。因此 G 在 $\tilde{E}$ 上有一个诱导作用，而且由于 G 中任一元在 $\tilde{C}$ 上的作用都有不动点且 G 在 $\tilde{S}$ 上的作用是自由的，这个作用由平移组成。但 $\tilde{E}$ 上的有限平移群都是阿贝尔的，故这个作用的核为一非零正规子群。但这是不可能的，因为由构造显然可以看出 π 是使 f 平凡化的极小基变换。这就排除了 $k=3$ 的可能性。 ∎

一个椭圆纤维化可以由解析的局部纤维化贴合而成，但这样得到的整体纤维化中的曲面往往不是代数的，因此我们需要下面的判别准则。

引理 3.2.5 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一解析纤维化，其中 S 为紧复解析曲面，C 为射影曲线。则 S 为代数曲面当且仅当 S 中存在曲线 R，它到 C 的诱导映射是满射。

证明 对 f 的任一奇异纤维 F_0，不难找到支撑集含在 F_0 中的一个有效除子 D_{F_0}，使得对于 F_0 的任一与 B 不相交的分支 Γ，都有 $D_{F_0}\Gamma>0$。设 D 为对所有的奇异纤维 F_0，这样的 D_{F_0} 的和，并设 F 为一条一般纤维。则存在充分大的正数 M 和 N，使得 $MB+D+NF$ 和 S 中的所有曲线相交数都是正的。于是由中井准则，$MB+D+NF$ 是丰富除子。反之是显然的。

§3.3 椭圆纤维丛

这一节的目的是对椭圆的纤维丛证明与定理 2.2.3 相同的结论。为此总设 $f:S\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维丛，F 为 f 的一条纤维。

众所周知，$\mathrm{Aut}(F)$ 是一个无限群，其中 F 的所有平移自同构组成一个正规子群 T，其商群 $G=\mathrm{Aut}(F)/T$ 同构于 $\mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_4$ 或 $\mathbf{Z}_6$。G 也等于 $\mathrm{Aut}(F)$ 在 F 的李代数 $H^1(F,\ \mathcal{O}_F)\cong\mathbf{C}$ 上的诱导作用的象，这使 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 成为 C 上的一个以 G 为结构群的拓扑纤维丛。因此，我们可以作下面的定义。

定义 3.3.1 关于 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 的单值同态 $\eta:\pi_1(C)\longrightarrow G$ 称为 f 的旋转单值。

下面的引理是上述定义以及定义 2.8.1 中的注的直接推论。

引理 3.3.2 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维丛。f 的旋转单值为零同态当且仅当 $q_f=1$。

推论 对于任一椭圆纤维丛，存在一个有限平展基变换使得拉回纤维化的不规则性 $=1$。

定理 3.3.3 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维丛。存在一个有限平展基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 使得拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 是平凡的。

证明 鉴于上面引理 3.3.2 的推论，我们可设 $q_f=1$。同引理 2.4.11 的证明中一样，有下面的交换图：

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ C & \longrightarrow & J(C) \end{array}$$

其中 α 是 S 的 Albanese 映射，$A=\mathrm{Alb}(S)$。由阿贝尔簇的理论可知，A 中存在一个光滑除子 D'，使得 ε 限制在 D' 上是有限平展的。于是 D' 在 S 中的原象 D 关于 f 也满足同样的性质，特别地，设 $\tilde{C}=D$，$\pi=f|_D$，拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 有截面。这个截面可以作为单位元截面，使得 $\tilde{S}$ 成为 $\tilde{C}$ 上的群层，因此自然同构于

$R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}/R^1\tilde{f}_*\mathbf{Z}$，而后者由于前面的旋转单值平凡，是平凡的。■

推论 $\mathbf{P}^1$ 上的椭圆纤维丛一定是平凡的。

§3.4 雅可比簇纤维化

设 $f:S\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维化，$j:\mathrm{Jac}(f)\longrightarrow C$ 为 f 的雅可比簇纤维化。由引理 2.4.6，$\mathrm{Jac}(f)$是一个光滑解析曲面。

引理 3.4.1 假定f有一个截面B，并设D为S中与B不相交的垂直曲线的和，$S'=S-D$。则存在一个 C-解析同构 $\theta:S'\longrightarrow\mathrm{Jac}(f)$，把$B$映到 $\mathrm{Jac}(f)$ 的单位截面。

证明 设p为S'中的一点，F为f含p的纤维，$q=B\cap F$。则p为F上的既约光滑点，且由于K_F平凡，由 Riemann-Roch 可知 $h^0(\mathcal{O}_F(p))=1$。因此 $\mathscr{L}=\mathcal{O}_F(p-q)$ 是 $\mathrm{Pic}(F)$ 中的一个非零元素，并且由于p和q属于F的同一个分支，由连续性知道 $\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}^0(F)$。于是如果定义 $\theta(p)=\mathscr{L}$，θ 是一个单射。不难证明它是解析的，并且比较纤维的维数可知它是满射的。■

引理 3.4.1 说明，有截面的椭圆纤维化等于它的雅可比簇纤维化的极小光滑紧致化。显然引理 3.4.1 对局部纤维化同样成立，因此可以证明以下命题。

命题 3.4.2 对任一椭圆纤维化 f，设 $\mathscr{J}$ 为 $\mathrm{Jac}(f)$ 的极小光滑紧致化。则$\mathscr{J}$为一代数曲面，且对于C的任一点 p，$\mathscr{J}$ 在p上的纤维与 $\dfrac{1}{m}F_p$ 同类型，这里 F_p 为 f 在 p 上的纤维，m 为 F_p 的重数。

证明 我们只要证明后一结论，然后因为 $\mathscr{J}$ 有单位截面，由引理 3.2.5 可知它是代数的。

显然，我们只需考虑局部的情形，因此设 F_0 为 f 的一条纤维，$f_\Delta:S_\Delta\longrightarrow\Delta$ 为 f 在 F_0 周围的局部纤维化。由引理 3.4.1 的局部形式，可设 F_0 为多重纤维，$F_0=mD$，其中m为重数。这时在

作了一个适当的关于循环平移群 $\mathbf{Z}_m$ 的中心纤维扭曲后，得到一个局部纤维化 $f'_\Delta: S'_\Delta \longrightarrow \Delta$，它的中心纤维是单重的。因为平移在雅可比簇纤维化上的作用是平凡的，f_Δ 的雅可比簇纤维化的紧致化与 f'_Δ 的相同，因此同构于 f'_Δ。另一方面，直接计算上述中心纤维扭曲的 Picard-Lefschetz 单值，不难看出 f'_Δ 的中心纤维与 D 同类型。 ▮

另一方面，利用引理 3.4.1，可以确定椭圆纤维化的一条奇异纤维上的有限阶元的分布。

引理 3.4.3 设 $f_\Delta: S_\Delta \longrightarrow \Delta$ 为一椭圆局部纤维化，其中心纤维为 ${}_1I_b$ 型。给定 f_Δ 的一个截面作为单位截面，设 D 为 S_Δ 的不含垂直分支的除子，使得对于 f_Δ 的任一光滑纤维 F_t，$D|_{F_t}$ 为 F_t 中由 b 阶元组成的既约除子，则 D 由 f_Δ 的 b^2 个不相交截面组成。在中心纤维 F_0 上，D 不通过 F_0 的奇点，并且 F_0 的每个不可约分支恰与 D 中的 b 个截面相交。

证明 首先，f_Δ 的 Picard-Lefschetz 单值诱导 $D|_{F_t}$ 到自身的一个一一映射，由小平邦彦的分类表可知这是个恒等映射。所以 D 到 Δ 的投影没有非奇异分歧，即 D 由 b^2 个截面组成。

设 J 为雅可比簇纤维化 $j_\Delta: \mathrm{Jac}(f_\Delta) \longrightarrow \Delta$ 的中心纤维。则引理 3.4.1 说明 J 同构于 $\mathbf{G}_m$，因此 J 中恰含 b 个 b 阶点。显然 D 在 J 上的限制为该 b 个点。我们只要证明通过 J 的一个点只能有 D 中的一个截面，由对称性就可知 D 恰有 b 个截面过 F_0 的每个分支，并且这 b 个截面在 F_0 互不相交。

事实上，否则，我们可设 D 有一个非零截面 B，使得 $B|_J = 0$。则 B 在 $R^1 f_{\Delta *} \mathcal{O}_{S_\Delta}$ 中的原象(注意

$$\mathrm{Jac}(f_\Delta) = B^1 f_{\Delta *} \mathcal{O}_{S_\Delta} / B^1 f_{\Delta *} \mathbf{Z},$$

见引理 2.4.6) $\tilde{B}$ 生成 $B^1 f_{\Delta *} \mathcal{O}_{S_\Delta}$ 在 Δ 上的一个子群，使得 $b\tilde{B} \subset R^1 f_{\Delta *} \mathbf{Z}$。但 $b\tilde{B}$ 是 $R^1 f_{\Delta *} \mathbf{Z}$ 中的一个非零多重截面，所以由引理 2.4.6 的证明，$b\tilde{B}$ 在 p 点的限制不能与 $\mathrm{Jac}(f_\Delta)$ 的零截面在 $R^1 f_{\Delta *} \mathcal{O}_{S_\Delta}$ 中的原象的 b 倍相交，与 $\tilde{B}$ 和该原象相交的假设矛盾。 ▮

为了对椭圆纤维化进行分类，重要的一步是对雅可比簇纤维化(或者由引理 3.4.1，带截面的椭圆纤维化)进行分类。为此，设 $f:S\longrightarrow C$ 为这样的一个纤维化，$p_1, \cdots, p_k$ 为 C 中 f 的临界点，

$$C'=C-\{p_1, \cdots, p_k\},$$

F 为 f 的一条一般纤维。首先我们有 Picard-Lefschetz 单值

$$\eta:\pi_1(C')\longrightarrow \mathrm{Aut}(H^1(F, \mathbf{Z}))\cong SL(2, \mathbf{Z}),$$

小平邦彦称之为 f 的同调不变量。f 的另一个不变量是模映射

$$j:C\longrightarrow \overline{\mathscr{M}}_1=\overline{\mathscr{H}}/\Gamma_1\cong \mathbf{P}^1,$$

这里 $\mathscr{H}$ 为复平面的上半平面，

$$\Gamma_1=SL(2, \mathbf{Z})/\pm I.$$

设 $\mathscr{M}'$ 为 $\mathscr{M}_1\subset\overline{\mathscr{M}}_1$ 中，投影映射 $\pi:\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{M}_1$ 的分枝轨迹以外的点(我们可设 $\mathscr{M}'=\mathbf{C}-\{0, 1\}$)，

$$\mathscr{H}'=\pi^{-1}(\mathscr{M}'), \quad C''=j^{-1}(\mathscr{M}')\cap C'.$$

则 $\mathscr{H}'$ 自然地成为 $\mathscr{M}'$ 上的一个 Γ_1-主丛，即 $\pi_1(\mathscr{M}')$ 到 Γ_1 的一个表示。拉回到 C'' 上，我们就得到一个表示 $\gamma:\pi_1(C'')\longrightarrow\Gamma_1$，它显然通过 η 分解。

一般地，一个同调不变量 $\eta:\pi_1(C')\longrightarrow SL(2, \mathbf{Z})$ 称为属于映射 $j:C\longrightarrow\overline{\mathscr{M}}_1$ 的，如果 $\nu:\pi_1(C'')\longrightarrow\Gamma_1$ 通过 η 分解。

定理 3.4.4 设 C 为一光滑射影曲线，$C'=C-\{p_1, \cdots, p_k\}$，$j:C'\longrightarrow\mathbf{C}-\{0, 1\}$ 为一态射。

1) 若 $k\geqslant 1$，则恰有 2^{2b+k-1} 个属于 j 的同调不变量，这里

$$b=g(C).$$

2) 给定 j 和属于 j 的同调不变量 η，有且仅有一个带截面的椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 以 η 为同调不变量并以 j 为模映射。

证明 1) 如 § A3 中取 $\pi_1(C')$ 的 $2b+k$ 个生成元

$$[\alpha_1], \cdots, [\alpha_b], [\beta_1], \cdots, [\beta_b], [\gamma_1], \cdots, [\gamma_k].$$

对这些元素中的前 $2b+k-1$ 个中的任一个 λ，我们可取 $\eta(\lambda)$ 为 $\gamma(\lambda)$ 的两个代表元中的任意一个；而当这 $2b+k-1$ 个元确定之后，$\eta([\gamma_k])$ 由 $\pi_1(C')$ 的定义关系

$$[\alpha_1][\beta_1][\alpha_1]^{-1}[\beta_1]^{-1}\cdots[\alpha_b][\beta_b][\alpha_b]^{-1}[\beta_b]^{-1}[\gamma_1]\cdots[\gamma_k]=1$$

所唯一决定。

2) 在此只证明变模情形，常模的情形留给读者。

首先，唯一性是显然的：两个具有相同的 j 和同调不变量的椭圆纤维化是等模的，并且具有平凡的等模单值(定义 2.8.8)；因此它们双有理等价。

为证存在性，首先注意对后面的例 3.6.1 作拉回，可知存在带截面的纤维化 $f_1:S_1\longrightarrow C$，它在 C' 上是光滑的，并以 j 为诱导映射。设 $\eta_1:\pi_1(C')\longrightarrow SL(2,\mathbf{Z})$ 为 f_1 的同调不变量，则满足 $\eta_1(\gamma)=\eta(\gamma)$ 的元 γ 组成 $\pi_1(C')$ 的一个指标为 2 的子群 H。设 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为 H 所对应的基变换，$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 为 f_1 在 π 下的拉回纤维化。诱导的二次有理映射 $\Pi:\tilde{S}\longrightarrow S_1$ 对应于 $\tilde{S}$ 上的一个对合 σ_1。$\tilde{S}$ 上另有一个对合 σ_2，它把 $\tilde{f}$ 的一般纤维 F 上的一个点 p 映到 $-p$。因为这两个对合交换，我们可以考虑对合 $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2$，并设 S 为商空间 $\tilde{S}/\sigma$ 的相对极小模型。现在不难看出诱导纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 即满足我们的要求。 ∎

注 3.4.5 小平邦彦关于椭圆纤维化的分类定理的另一个基本组成部分是：关于给定的不变量 j 和 η 的所有不含多重纤维的椭圆纤维化(代数或非代数的)可由阿贝尔群 $\mathscr{J}\mathrm{ac}(f)$ 参量化，这里 f 如定理 3.4.4 所述。

§3.5 基 本 群

纤维化的方法可以用来完全地确定一个椭圆曲面的拓扑基本群：

定理 3.5.1 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维化，它含有一条不是光滑多重纤维的奇异纤维。则 $\pi_1(S)$ 的垂直部分 $\mathscr{V}_f$ 是平凡的。

证明 首先，定理 2.7.6 的推论以及定理 3.1.2 的推论 2 使我们可以假定 f 的奇异纤维都是 ${}_mI_b$ 型的(特别地，定理的条件蕴含 f 是变模的)。然后由于定理 2.7.10，模了适当的基变换后可设 f 有一条截面 D。

把D看成f的单位截面，它在f的每条光滑纤维F上唯一地定义了一个对合，这个对合把点$D\cap F$映到它自身。这样的对合可以贴合成S上的一个双有理C-对合$\sigma:S\dashrightarrow S$。然后由于$S$是$f$的唯一的相对极小模型，$\sigma$在$S$上处处有定义。

引理 3.5.2 σ没有孤立不动点，并且它的不动点集合R是一个不含垂直分支的除子。特别地，商曲面$\hat{P}=S/\sigma$是光滑的。

证明 显然，只需考虑σ在f的一条奇异纤维F_0上的限制对合的不动点。但这时F_0是一条I_b型的纤维，因此F_0上带不动点的对合一定是一个对折。这个对折有两个中心，它们分别可能是F_0的一个不可约分支或者是一个二重点。由此立即可以看出F_0中没有由σ的不动点组成的分支。

另外，σ的不动点的一维部分R'在每个这样的中心最多与F_0相交2。但$R'F_0=4$，所以σ在F_0上的不动点都在R'上。 ▮

现在$\hat{P}$是C上的一个双有理直纹面，并且D在$\hat{P}$中的象是这个双有理直纹的一条截面E。不难看出，$\hat{P}$可以唯一地收缩到C上的一个直纹面P，使得$\hat{P}$中与E不相交的垂直曲线在P中的象都是一个点。设B为R在P中的象。则存在$\delta\in \mathrm{Pic}(P)$使得诱导映射$\psi:S\longrightarrow P$为对应于对$(B,\delta)$的二次覆盖，且$R$只有可忽略奇点。

因为B是直纹曲面P中的一个既约除子且B与P的一条纤维相交为4，直纹曲面的性质告诉我们$B^2\geqslant 0$，且等号成立仅当R在C上是平展的，因此f为光滑纤维化，这与假设不符。因此$B^2>0$。进一步的计算揭示当P有一条自相交数<0的截面C_0时，如果B不含C_0，则$B^2\geqslant -16C_0^2$，否则，$(B-C_0)^2\geqslant -9C_0^2$。由此可以推出$C$上的局部自由层$\mathscr{E}=\varphi_*\mathscr{O}_P(\Gamma)$是正定的，这里$\varphi:P\longrightarrow C$是$P$上的直纹，$\Gamma=R$（当$B$不含$C_0$或不存在满足上述条件的$C_0$时）或$B-C_0$（当$B$包含$C_0$时）。于是由定理1.2.5，在模了一个合适的基变换后可设$\mathscr{E}$几乎处处由整体截面生成。

特别地，设F为P的一条一般纤维，$p=\varphi(F)$，$\varphi_\Delta:P_\Delta\longrightarrow\Delta$

为φ在p周围的一个局部纤维化。则存在$\mathscr{E}$的一个整体截面s，它所对应的除子$\Gamma'\in|\Gamma|$在$P_{\blacktriangle}$上的限制是光滑的，并且Γ'和F只(相切地)交于一点。设$B'=\Gamma'+(B-\Gamma)$。则B'是P上的一个线性等价于B的有效偶除子，并且因为B既约且不含有垂直分支和不可忽略奇点，我们可以假设B'也具有同样的性质。

设

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\psi'} & P \\ & f'\searrow \quad \swarrow\varphi' & \\ & C & \end{array}$$

为对应于(B',δ)的二次覆盖。则F在S'中的原象纤维是一条III型(当$\Gamma=B$时)或II型(当$\Gamma=B-C_0$时)的纤维，因此是单连通的。于是由于f'不含多重纤维，定理2.7.8说明

$$\pi_1(S')=\pi_1(C)。$$

为证$\pi_1(S)=\pi_1(S')$，只需注意，因为B线性等价于B'，S和S'的两个(可能是奇异的)模型S_1和S_1'之间有一个在C上的形变等价，这里S_1和S_1'分别为对应于(B,δ)和(B',δ)的奇异意义下的二次覆盖。因此$\pi_1(S_1)=\pi_1(S_1')$。但由假设B和B'只有可忽略奇点，所以S_1和S_1'最多只有有理二重奇点。而有理二重奇点的解消不改变基本群，故$\pi_1(S)=\pi_1(S_1)$，$\pi_1(S')=\pi_1(S_1')$。 ▮

推论1　若$f:S\longrightarrow C$为一不含多重纤维的变模椭圆纤维化，则S的Néron-Severi群不含挠元。

证明　设η为$\mathrm{Pic}(S)$中的一个n阶元。则η定义一个n次平展覆盖$\Pi:\widetilde{S}\longrightarrow S$(§1.1)，即$\pi_1(S)=\pi_1(C)$的一个指标为$n$的正规子群$H$。设$\pi:\widetilde{C}\longrightarrow C$为$H$所对应的$n$阶平展覆盖。则显然$\Pi$是$\pi$的拉回，故$\eta$为$\mathrm{Pic}(C)$中的一个$n$阶元$\gamma$的拉回。于是$\gamma\in\mathrm{Pic}^0(C)$，这样$\eta$也属于$\mathrm{Pic}^0(S)$。 ▮

推论2 (Moishezon, [Moi, Theorem 10]) 设$f:S\longrightarrow C$为一相对极小椭圆纤维化。则S为单连通曲面当且仅当，

1. $C\cong\mathbf{P}^1$；

2. f 含有一条不是光滑多重纤维的奇异纤维;

3. f 最多只有两条多重纤维，且若 f 恰有两条多重纤维，则它们的重数互素。

另一方面有如下定理:

定理 3.5.3(Dolgachev,[Do2][Do3])　设 $f':S'\longrightarrow\mathbf{P}^1$ 为一椭圆纤维化，其中 $q(S')=0$，且 f' 有截面。设 $F_1,\cdots,F_r$ 为 f' 的一组半稳定奇异纤维，其型分别为 $I_{b_1},\cdots,I_{b_r}$，这里 $b_i>0$；并设 $m_1,\cdots,m_r$ 为一组大于一的正整数。则存在一个代数的椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow\mathbf{P}^1$，以 f' 为其雅可比纤维化，且 f 的对应于 F_i 的纤维是以 m_i 为重数的多重纤维。

特别地，取 $r=2$，并设 $m_1>1$ 和 $m_2>1$ 为两个互素的正整数，由定理 3.2.4 可得到如下推论:

推论　存在单连通的代数曲面 S，满足 $p_g(S)=q(S)=0$，$\kappa(S)=1$。

这样的曲面 S 称为 Dolgachev 曲面。

§3.6　例

例 3.6.1　存在椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 使得模映射 $j:C\longrightarrow\mathcal{M}_1\cong\mathbf{P}^1$ 是同构。

设 D 为 $\mathbf{P}^2$ 中由方程 $X_0(X_1^2-X_2^2)-X_2^3=0$ 定义的曲线，S' 为 $\mathbf{P}^2$ 的以 D 和无限远直线 $X_0=0$ 为分枝轨迹的二次覆盖的极小奇点解消。$\mathbf{P}^2$ 中过点 $(0,1,1)$ 的直线束在 S' 中的原象组成一个椭圆曲线束 Λ。爆发 Λ 的基点，我们得到一个曲面 S，以及诱导的椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C\cong\mathbf{P}^1$。

f 共有三条奇异纤维 F_1、F_2、F_3，它们分别是 $\mathbf{P}^2$ 中的直线 $X_0=0$，$X_1=X_2$ 和 $32X_0=27(X_1-X_2)$ 的原象，其型分别为 IV*、III、I_1。特别地，$\mathcal{M}_1$ 中的尖点 ∞ 在 j 下的原象只有 $p=f(F_3)$ 一个点，并且考察 f 在 p 周围的局部纤维化，不难看出 j 在 P 上没有分歧。因此 j 是一次的。

例 3.6.2 定理 3.2.4 中 $k>0$ 的各种情形是很容易构造的。例如，设 E_1 为一带有 n 阶非平移自同构群 $\mathbf{Z}_n$ 的一条椭圆曲线(这里 $n=2, 3, 4$ 或 6)，E 为任一椭圆曲线。固定 $\mathbf{Z}_n$ 在 E 上的一个忠实平移作用。于是 $\mathbf{Z}_n$ 在 E 和 E_1 上的作用诱导它在 $E\times E_1$ 上的一个自由作用，设 S 为其商。则 $E\times E_1$ 到第二个因子的投影诱导 S 上的一个椭圆纤维化

$$f: S\longrightarrow C=E_1/\mathbf{Z}_n\cong\mathbf{P}^1.$$

这样就可得到 $\kappa(S)=0$ 的 1) 中的四种情形。

例 3.6.3 椭圆模纤维化(Shioda, [Shio])。

我们采用 § A2 的记号，设 N 为一 $\geqslant 3$ 的正整数，$\Gamma=\Gamma(N)$ 为级 N 的主同余子群，并如引理 A 2.8 前面的讨论一样，考虑 Γ 在 $\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ 上的作用，使得 $S'_N=\mathscr{E}'/U$ 成为 $C'_N=\mathscr{H}/\Gamma$ 上的椭圆曲面。这个椭圆纤维化 $f'_N: S'_N\longrightarrow C'_N$ 可以唯一地拓展成 C_N 上的一个相对极小纤维化 $f_N: S_N\longrightarrow C_N$。这就是级 N 的椭圆模纤维化，其中 S_N 称为级 N 的**椭圆模曲面**。因为 $\mathscr{E}$ 恰好是 f_N 的李代数层，$f_*\omega_{S_N/C_N}$ 的次数即关于 Γ 的权为 1 的模函数的次数，故由引理 A 2.8，$\chi_{f_N}=N\Delta_N$。

为了计算 f_N 的奇异纤维，注意，因为 $\Gamma(N)$ 是 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的正规子群，C_N 到 $C_1\cong\mathbf{P}^1$ 有一个典范的 Galois 映射，它把 C_N 的尖点都映到 C_1 的尖点 ∞。于是由自同构，f_N 在 C_N 的所有尖点上的纤维都同构，所以我们只要考虑 ∞ 上的纤维 F_0 即可。这时由构造直接得到 F_0 的局部 Picard-Lefschetz 单值矩阵有形式 $\begin{pmatrix}1 & N\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，因此 § 3.1 中的小平分类表告诉我们 F_0 为 ${}_mI_N$ 型的纤维。但 f_N 有单位截面，所以不含多重纤维，因而 $m=1$。f_N 在 C_N 的尖点以外显然是光滑的。综上所述，得以下命题。

命题 3.6.4 级 N 的椭圆模纤维化 f_N 的奇异纤维为 t_N 条 I_N 型纤维，这里 t_N 为 C_N 的尖点个数，如引理 A 2.5 所示。

命值 3.6.5 f_N 有 N^2 条互不相交的截因 $D_0, \cdots, D_{N^2-1}$，它们在 f_N 的任一光滑纤维 F 上的限制正好是 F 上 N 阶元所构成的

子群，而过一条 I_N 型奇异纤维的每个不可约分支，恰有N条这样的截面。

证明　设 D' 为 S'_N 中的除子，使得对于 $f'_N: S'_N \longrightarrow C'_N$ 的每条纤维 F，$D'|_F$ 为F中所有N阶元所成的(既约)除子。D' 可以唯一地拓展到 S_N 中的一个不含垂直分支的除子 D。由定义显见 D' 所定义的单值同态(见例 2.8.6)$\alpha: \pi_1(C'_N) \longrightarrow \mathrm{Aut}(D'|_F)$ 是平凡的，因此D由 N^2 条截面组成。这些截面显然在 f_N 的光滑纤维上不相交。而由引理 3.4.3 和命题 3.6.4，它们在 f_N 的奇异纤维上也不相交。 ▮

注 3.6.6　事实上，Shioda [Shio] 证明了 $D_0, \cdots, D_{N^2-1}$ 是 f_N 的所有截面。

引理 3.6.7　S_N 中的下列曲线数值无关，且它们的类生成 $\mathrm{NS}(S_N) \otimes \mathbf{Q}$：单位截面 D_0，一条一般纤维F以及所有与 D_0 不相交的垂直(-2)-曲线 $\Gamma_1, \cdots \Gamma_{(N-1)t_N}$。

证明　一方面，定理 2.1.5 及其证明说明定理中所述的这些曲线在 $\mathrm{NS}(S_N)$ 中数值无关，因此 S_N 的 Picard 数

$$\rho \geqslant (N-1)t_N + 2 = 12(N-1)\Delta_N + 2;$$

另一方面，由 Noether 公式得知

$$\rho \leqslant h^{1,1}(S_N) = 10\chi_{f_N} + 2g(C_N) = 12(N-1)\Delta_N + 2.$$

于是等式成立，且若H为这些曲线在 $\mathrm{NS}(S_N)$ 中生成的子群，则 $\mathrm{NS}(S_N)/H$ 为挠群。 ▮

附记

本章前四节的内容属于小平邦彦关于椭圆纤维化的经典理论。见[Ko1]、[Ko2]。

第 4 章

亏格二的纤维化

§4.1 相对典范覆盖与奇异纤维分类

小平邦彦关于椭圆纤维化中奇异纤维的分类以及奇异纤维与曲面的不变量之间的关系的理论(§3.1 和 §3.2)引起了一个十分自然的问题，当纤维化的亏格大于1时，是否也可以找到类似的分类，并利用给定的纤维化中各类奇异纤维的数目来导出曲面的不变量？换句话说，纤维化的整体性质(不变量)是否总可以由局部性质(奇异纤维或推广地,某种非一般的纤维的数目)所确定？

具体地说，对于给定亏格 g 的纤维化中可能出现的每一条纤维 F，我们希望给它对应一组“奇异性指数” $s_1(F)$，…，$s_k(F)$，其个数 k 与 g 有关,它们满足：

1) 对任一固定的亏格为 g 的纤维化,只有有限多条纤维 F 使 $s_1(F)$，…，$s_k(F)$ 中有非零值；

2) 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格为 g 的纤维化，$s_i(f)=\Sigma_F s_i(F)$，这里求和号对 f 的所有纤维施行，则 f 的不变量 $K^2_{S/C}$ 和 χ_f 可以表示成 $s_1(f)$，…，$s_k(f)$的函数。

推广小平理论的努力首先是对亏格 2 的纤维化作出的，因为亏格 2 是椭圆纤维化以上的第一种情形。Ogg[O]和 Namikawa-Ueno[NU] 等人分别通过组合和单值的途径给出了亏格 2 的奇异纤维的详细的分类表。然而，这种直接推广小平分类的试图遇到了一个明显的困难,那就是,小平在亏格 1 时的 6 种奇异纤维到了亏格 2 时一下子增加到了数十种，而且有迹象表明在亏格更高时这种增加的速度还将大大加快。在如此众多的可能性面前，这样

的分类表已经失去了其实际意义下的价值。

另一方面，Horikawa[Ho2] 在1977年利用相对典范映射对亏格2的奇异纤维作了一种更为实质性的分类，他利用相对典范映射把奇异纤维分成五类。然后他证明了整体不变量可以用这五类纤维的个数以及相对典范映射的分枝除子的次数来表示，从而成功地完成了由局部（奇异纤维）到整体（不变量）的过渡。Horikawa 的这个分类为作者对亏格2的纤维化进行系统的研究[X2] 提供了一个重要的基础。在这一节里，我们将主要遵循 Horikawa 的相对典范映射方法来刻划亏格2的奇异纤维，但对这个分类结果的表述作出了较大的改进，使其能更好地反映上面所说的"奇异性指数"的概念。

设 $f:S\longrightarrow C$ 为一相对极小的亏格二纤维化，则

$$P=\mathrm{Proj}(f_*\omega_{S/C})$$

是 C 上的一个直纹面，且相对典范映射 $\Phi_K:S\dashrightarrow P$ 是一般二次的，因为 Φ_K 限制在一般纤维上是二次映射。换言之，C 中存在一个 Zariski 开集 C'，使得 Φ_K 限制在 C' 的原象上是一个二次覆盖，因而它对应了 $S'=f^{-1}(C')$ 上的一个对合 $\sigma':S'\longrightarrow S'$。但 σ' 因此是 S 的一个双有理 C-对合，而 S 的相对极小模型是唯一的，所以 σ' 可以唯一地拓展到 S 的一个 C-对合 $\sigma:S\longrightarrow S$。

设 $\rho:\hat{S}\longrightarrow S$ 为对 Φ_K 的所有基点以及 σ 的孤立不动点的爆发的复合，$\hat{\Phi}:\hat{S}\longrightarrow P$ 为 Φ_K 诱导的一般二次态射。$\hat{\Phi}$ 对应于 P 上的一组奇异二次覆盖数据 (R,δ)。Riemann-Hurwitz 公式告诉我们 R 与 P 在 C 上的一条纤维的相交数为 $2g+2=6$。设 $\psi:\tilde{P}\longrightarrow P$ 为 R 的奇点的极小偶解消，$(\tilde{R},\tilde{\delta})$ 为 (R,δ) 的既约偶原象，$\tilde{\theta}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{P}$ 为对应的二次覆盖。

另一方面，ρ 的典范性告诉我们 σ 可以拓展到 $\hat{S}$ 上的一个对合 $\hat{\sigma}:\hat{S}\longrightarrow\hat{S}$，其商 $\hat{P}=\hat{S}/\hat{\sigma}$ 到 P 有一个态射。于是 ψ 的极小性给出一个双有理 C-态射 $\hat{\rho}:\hat{S}\longrightarrow\tilde{S}$。由于 $\tilde{S}$ 和 $\hat{S}$ 的相对极小模型是一致的，ρ 通过 $\hat{\rho}$ 分解。然后由于 ρ 的极小性，$\hat{\rho}$ 是同构。这说明了一个亏格二的纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 由对应的数据组 $(P,R,$

δ)所唯一决定，这里P是C上的一个直纹面，(R, δ)是P上的一组二次覆盖数据，$RF=6$，这里F是直纹$P\longrightarrow C$的一条纤维。(P, R, δ)称为C上的一组亏格2数据。我们有下面的交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \tilde{P} \\
\rho\downarrow & & \downarrow\psi \\
S & \overset{\Phi_K}{\dashrightarrow} & P \\
 & f\searrow \quad \swarrow\varphi & \\
 & C &
\end{array}$$

现在我们需要确定(P, R, δ)所应当满足的条件。先证明下面的一般性引理。

引理 4.1.1 设$\varphi: T\longrightarrow C$为一直纹(不一定相对极小)，$(B, \delta)$为$T$上的一组光滑二次覆盖数据，$\theta: S\longrightarrow T$为对应的二次覆盖，$f: S\longrightarrow C$为诱导的纤维化，$\sigma$为$\theta$所对应的$S$的对合。假定$f$的亏格$g\geqslant 1$，则$S$中的垂直$(-1)$-曲线只有以下两类：

1) T中与B不相交的垂直(-1)-曲线的原象。这样的曲线在σ下成双对应。

2) T中含于B的垂直(-2)-曲线的原象。这样的曲线E上的点都是σ的不动点，因此E是S的某个收缩上的对合的一个孤立不动点的原象。

证明 设E为S中的一条垂直(-1)-曲线，D为其在T中的象。这有三种可能：

a) $\theta^*D=E+E'$，其中$E'=\sigma(E)\neq E$；

b) $\theta^*D=2E$； c) $\theta^*D=E$。

在情形a)，有

$$-2=2E^2=E^2+E'^2\leqslant(E+E')^2=2D^2\leqslant 0.$$

如果$D^2=0$，则D是φ的一条纤维，于是$F=E+E'$是f的纤维。但这样$p_a(F)=0$，与假设矛盾；所以$D^2=-1$，$EE'=0$，由此得$DB=0$，此即1)。

情形b)说明D是B的一个不可约分支，而$D^2=2E^2=-2$，故

为2)。

最后，c)是不可能的，因为 $E^2=2D^2$ 是偶数。 ▮

回到亏格2的情形，设 $\psi=\psi_1\circ\cdots\circ\psi_n$ 为 ψ 到爆发 $\psi_i: P_i\longrightarrow P_{i-1}$ 的分解，$p_i\in P_{i-1}$ 为 ψ_i 的中心，$\mathscr{E}_i$ 和 E_i 分别为 p_i 在 $\tilde{P}$ 中的完全原象和严格原象，k_i 如 §1.3 所定义。根据公式 (1.11)，Φ_K 由 $\tilde{P}$ 上的线性系

$$|\tilde{D}|=\left|\psi^*(K_P+\delta+\varphi^*A)-\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)\mathscr{E}_i\right|$$

所定义，其中 A 是 C 上的一个充分丰富的除子。因此如果把 $|\tilde{D}|$ 分解成 $|\tilde{D}|=|\tilde{M}|+Z$，其中 Z 为 $|\tilde{D}|$ 的固定部分，则必有 $|\tilde{M}|=\psi^*|M|$，其中 $|M|$ 为 P 上的一个 $\mathcal{O}(1)$ 线性系。比较 $|\tilde{D}|$ 和 $|\tilde{M}|$ 并注意 $K_P+\delta$ 也是 P 上的一个 $\mathcal{O}(1)$，我们得到

$$Z=\psi^*\varphi^*B-\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)\mathscr{E}_i,$$

这里 B 是 C 上的一个有效除子。特别地，如果 F 是 P 的一条包含 R 的不可忽略奇点的纤维，则 F 在 $\tilde{P}$ 中的严格原象 $\tilde{F}$ 在 Z 中。而且由定义 Z 不能包含 F 在 $\tilde{P}$ 中的完全原象 $\psi^*(F)$，所以 R 一定有一个在 F 上的不可忽略奇点(可能是无限接近奇点) p_i，使得 E_i 在 Z 中的重数小于它在 $\psi^*(F)$ 中的重数。

另一方面，由 A 的充分丰富性可知若 E_i 在 $\psi^*(F)$ 中是单重的(换言之 p_i 是纤维上的单重点)，则 $|\tilde{M}-\mathscr{E}_i|$ 没有固定部分。于是只有两种可能性：

A) F 上另有一个 R 的不可忽略奇点 p_j，使得 E_j 在 Z 中的重数小于它在 $\psi^*(F)$ 中的重数 (注意此时 p_i 和 p_j 互不无限接近)；要么

B) E_i 在 $\psi^*(F)$ 中的重数大于 1。

注意如果 R 在一点 p 上有不可忽略奇点，则 R 的非垂直部分 R_h 在 p 点至少有一个 3 阶奇点，特别地 $R_hF|_p\geqslant 3$。因为 $R_hF=6$，由此不难推出 R 的不可忽略奇点都是 $(3\rightarrow 3)$ 型奇点或者 4 阶奇点。

于是在情形 A)，F 上使得 E_i 在 Z 中的重数小于它在 $\psi^*(F)$ 中的重数的不可忽略奇点 p_i 只有 p_i 和 p_j 两个。设 $\Gamma_1=E_i$，$\cdots$，$\Gamma_t=E_j$ 为 $\psi^*(F)$ 中连接 E_i 和 E_j 的有理曲线链。则通过简单的分析可以看出，$t=2s+1$ 为奇数，$\widetilde{F}=\Gamma_{s+1}$ 为链的中心曲线，并且

$$\Gamma_1,\ \cdots,\ \Gamma_s,\ \Gamma_{s+2},\ \cdots,\ \Gamma_{2s+1}$$

包括了 R 在 F 上的所有不可忽略奇点的严格原象。

同理，在情形 B)，E_i 在 $\psi^*(F)$ 中的重数一定是 2，并且在 $\psi^*(F)$ 中有一条有理曲线组成的链 Γ_1，$\cdots$，$\Gamma_t=E_i$，其中所有的 Γ_i 在 $\psi^*(F)$ 中的重数都是 2，且 Γ_1 和 $\widetilde{F}$ 以及 $\psi^*(F)$ 的另一条单重分支 Γ 相交。这些 Γ_i 和 Γ 组成了 R 在 F 上的所有不可忽略奇点的严格原象。

总而言之，我们得到 F 的两种类型为：

A) F 上存在两个不同的点 p，q，使得 R_h 在 p 和 q 上各有一个 3 阶奇点。R 在 p 和 q 的完全原象上各有 s 个$(3\to3)$型奇点$(s\geqslant0)$，且若 R 含 F，则 R 在 F 上还有一对 4 阶奇点；否则，R 在 F 上不含其它不可忽略奇点。

B) R_h 与 F 交于唯一的一个点 p，R 在 p 的完全原象上有 $2s$ 个相切于 F 的$(3\to3)$型奇点。如果 R 含 F，则 R 在 F 上还有一对 4 阶奇点；否则，R 在 F 上不含其它不可忽略奇点。

根据上面的讨论并根据引理 4.1.1，可知 $\widetilde{S}$ 中的垂直(-1)-曲线只有 R 的$(3\to3)$型奇点中的(-2)-曲线的原象以及当 P 的纤维 F 上有不可忽略奇点并且 F 含在 R 中时 F 的严格原象。通过简单的计算可知，收缩了 $\widetilde{S}$ 中的这些(-1)-曲线后所得到的曲面是在 C 上相对极小的，因此与 S 一致。即：

引理 4.1.2 S 的相对典范映射 Φ_K 的基点都是单重的，且都是 σ 的孤立不动点；$\widetilde{S}$ 等于爆发 S 中所有 σ 的孤立不动点后得到的曲面。

顺便指出，Horikawa 分类中的五种奇异纤维分别对应上述情形 A)和 B)的不同可能性：

I_k）情形 A)，且F含在R中。R在F上有一对4阶奇点以及$2(k-1)$个(3→3)型奇点。

II_k）情形 A)，且F不含在R中。R在F上有$2k$个(3→3)型奇点。这两种纤维的组合形式如下图所示，其中Γ为一个满足$K_{S/C}\Gamma=-\Gamma^2=1$的除子。

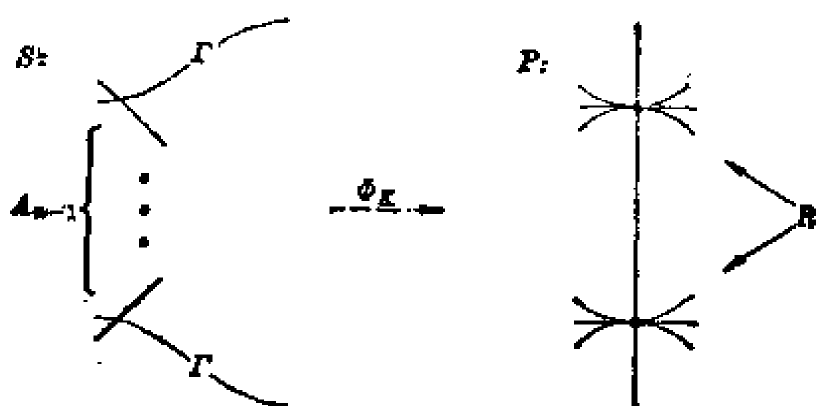


图 4.1 I 型与 II 型奇异纤维

III_k）情形 B)，且F含在R中。R在F上有一对4阶奇点及$2k$个(3→3)型奇点。

IV_k）情形 B)，且F不含在R中。R在F上有$2k$个(3→3)型奇点。如下图所示。

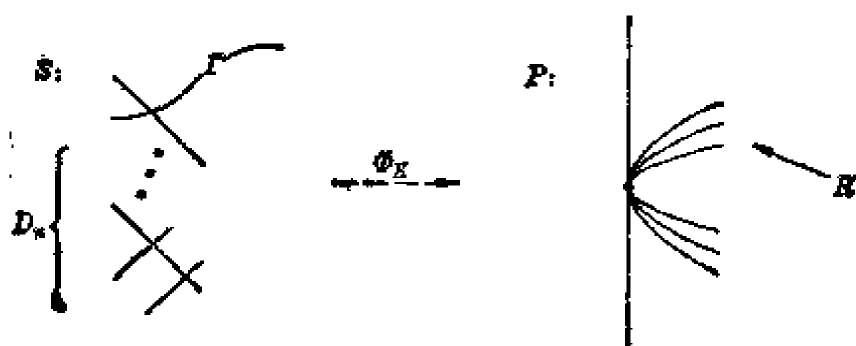


图 4.2 III 型与 IV 型奇异纤维

V）情形 B)，且F_1和E都在R_1中。这时R在点p和q上分别有一个4阶奇点，并且在F上没有其他不可忽略奇点。纤维如图 4.3 所示。

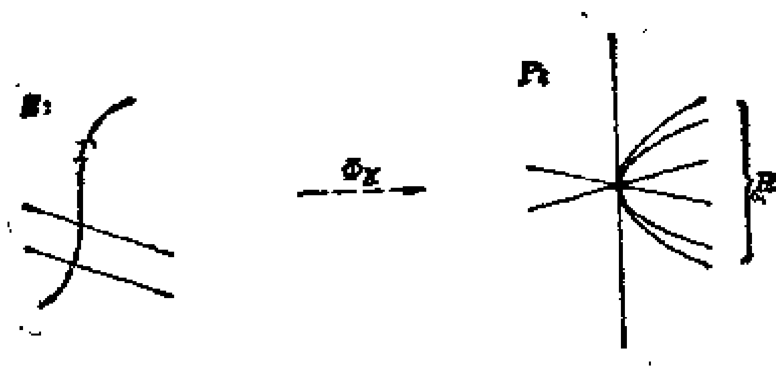


图4.3　V型奇异纤维

在 Horikawa 的分类另有0型的奇异纤维，这是不含不可忽略奇点的纤维。

现在很容易看出下面的定理成立。

定理 4.1.3　设P为曲线C上的一个直纹曲面，(R, δ)为P上的一组奇异二次覆盖数据，满足：

1) R与P的直纹的一条纤维相交数为6；

2) P中含有R的不可忽略奇点的纤维都是上述五种之一。

则(P, R, δ)为C上的一组亏格二数据，换言之，P与(R, δ)所对应的二次覆盖的相对典范象一致。

我们不直接利用 Horikawa 的这个分类表，而是用下面定义的纤维的奇异性指数来导出纤维化的不变量。

定义 4.1.4　设$f: S\longrightarrow C$为一亏格2的相对极小纤维化，F为f的一条纤维，P、$\tilde{P}$等如前所定义。稍稍放宽一点语言的严格性，我们也用F表示P中的对应纤维。把ψ分解成$\psi=\hat{\psi}\circ\tilde{\psi}$，其中$\hat{\psi}: \hat{P}\longrightarrow P$为$R$的所有不可忽略奇点的爆发，并设$(\hat{R}, \hat{\delta})$为$(R, \delta)$在$\hat{P}$中的既约偶原像，$\hat{R}_v$为$\hat{R}$中孤立的垂直$(-2)$-曲线以外的部分。定义$F$的第一和第二类奇异性指数，$s_2(F)$和$s_3(F)$，如下：

若R在F上没有4阶奇点，则$s_3(F)$等于R在F上的$(3\to3)$型奇点个数；否则，$s_3(F)$等于R在F上的$(3\to3)$型奇点个数加1。

$s_2(F)$等于 $\hat{R}_p$ 到 C 的投影在 $f(F)$上的分歧指数。注意，当 $\hat{R}_p$ 在 F 上有（可忽略）奇点时，这些奇点可转换成相应的分歧指数，如引理 2.4.8 前面的定义所述。而当 $\hat{R}_p$ 有垂直分支时，这样的一个分支对 $s_2(F)$的贡献为 -2，见注 2.4.9。

因为 $s_2(F)$和 $s_3(F)$ 只在有限多条纤维上不为零，我们可定义 f 的第一和第二类奇异性指数 $s_2(f)$ 和 $s_3(f)$ 为关于所有纤维的 $s_2(F)$和 $s_3(F)$之和。

我们使用 s_2、s_3 而不是 s_1、s_2 的原因主要是希望下标能反映 R的相应奇点的阶，以使亏格 2 的情形与下一章中一般超椭圆情形相一致。

当纤维 F 半稳定时，它的奇异性指数有十分明确的几何意义。首先，下面的引理是显然的。

引理 4.1.5 设 (P, R, δ) 为 C 上的一组亏格 2 数据，$f: S \longrightarrow C$ 为对应的亏格 2 纤维化，F为 P 中的一条纤维，$\hat{R}_p$，$\tilde{P}$，$\hat{P}$ 如上定义。则 S 中对应于 F 的纤维半稳定当且仅当下面的条件成立：

1) F 在 $\hat{P}$ 中的完全原象 $\hat{F}$ 既约，或者说 R在 F 上只有 A)型不可忽略奇点，且

2) $\hat{R}_p$ 仅通过 $\hat{F}$ 的光滑点，且在每个点上 $\hat{R}_p$ 和 $\hat{F}$ 的相交数至多是 2。

现在设 F 为 S 中的一条半稳定纤维，$\tilde{F}$ 为 F 在 $\tilde{P}$ 中的象纤维，p 为 F 中的一个分离二重点。则 p 的象 $\tilde{p}$ 要么是含在 $\tilde{R}$ 中的一条垂直(-2)-曲线，要么是 $\tilde{F}$ 的一个分离二重点。前一种可能性的点都是 F 的分离二重点，其个数恰等于 $s_3(F)$；后者 $\tilde{p}$ 的原象只有 p 一点。因此 $\tilde{p}$ 含在 $\tilde{R}$ 中，但由引理 4.1.5 知这是不可能的。于是 $s_3(F)$等于 F 的分离二重点个数。

另一方面，因为 $\hat{R}_p$ 的奇点都是二重点，容易看到每个这样的奇点的爆发恰好在 F 中引入两个不分离二重点。而 $\tilde{R}$ 在 C 上的每个分歧点（都是指数为 1 的）都对应于 f 中的一个不分离二重点。与定义 4.1.4 比较，得到下面的定理：

定理 4.1.6　对于一条半稳定的相对极小亏格 2 纤维 F，$s_2(F)$和 $s_3(F)$分别等于F中不分离和分离的二重点个数。

定义 4.1.7　设 (P, R, δ) 为一组亏格 2 数据。定义R的主部 R_p 为R中所有在 $\check{S}$ 中的严格原象不是垂直(-1)-曲线的不可约分支的全体。换言之，$R-R_p$ 为所有使 $s_3(F)$ 为奇数的纤维F全体。

现在我们可以来计算f的相对不变量了。设F为P在C上的任一纤维。因为 $K_{P/C}$ 和F生成 $\mathrm{Pic}\,(P)\otimes\mathbf{Q}$ 且 $K_{P/C}F=-2$，我们可以写

$$R_p\sim-3K_{P/C}+nF, \tag{4.1}$$

其中 $n\in\mathbf{Z}$，但不一定是偶数。因为 $K_{P/C}^2=0$，我们有

$$K_{P/C}R_p=-2n,\ R_p^2=12n, \tag{4.2}$$

于是如果我们用 $r(D)$记一个除子D到C的投影的分歧指数，引理 2.4.8 给出

$$r(R_p)=-2K_{P/C}R_p+6n,$$

即

$$s_2(f)=r(\hat{R}_p)=10n-12s_3(f). \tag{4.3}$$

因此由二次覆盖的公式和 Persson 向量(§1.3)，通过简单的计算就得到不变量公式

定理 4.1.8　对任一相对极小的亏格 2 纤维化 $f: S\longrightarrow C$，

$$K_{S/C}^2=2n-s_3(f)=\frac{1}{5}s_2(f)+\frac{7}{5}s_3(f),$$

$$\chi_f=n-s_3(f)=\frac{1}{10}s_2(f)+\frac{1}{5}s_3(f),$$

$$e_f=10n-11s_3(f)=s_2(f)+s_3(f).$$

§4.2　地理问题

和一般型曲面的地理问题类似，亏格 2 纤维化的地理问题有两个意义：一是确定这样的纤维化的不变量应当满足的条件；二是研究满足纤维化的某些条件对不变量的影响，或者倒过来说，研究

给定不变量的纤维化的性质。

对于第一个地理问题，首要的任务是确定一个亏格 2 的纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的不变量，主要是其斜率 λ_f 的上下界。事实上，除了非负性定理 2.4.10 外，$K^2_{S/C}$ 和 χ_f 并不存在别的独立上下界。

对此由定理 4.1.8 以及 $s_2(f)$和 $s_3(f)$ 的非负性，有以下定理：

定理 4.2.1 相对极小的非光滑亏格 2 纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 满足 $2\leqslant\lambda_f\leqslant 7$，且 $\lambda_f=2$ 当且仅当 $s_3(f)=0$，$\lambda_f=7$ 当且仅当

$$s_2(f)=0.$$

然后由定理 2.4.10 的推论，得以下推论。

推论[X2] 一个带亏格 2 纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的曲面 S 满足 $K^2_S\leqslant 8\chi(\mathcal{O}_S)$，且等号成立当且仅当 f 是解析纤维丛。

在底曲线的亏格较低时，我们对纤维化斜率的上界有更精确的估计。

定理 4.2.2[K2] 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 2 的纤维化，则

$$K^2_{S/C}\leqslant 6\chi_f+2(g(C)-1)+q_f.$$

证明 我们采用对曲面 S 的 Picard 数的估计。对 f 的任一纤维 F，Horikawa 的奇异纤维分类表告诉我们 $s_3(F)\leqslant l_F-1$，这里用 l_F 表示 F 中不可约分支的个数。所以

$$\begin{aligned}
&K^2_{S/C}-2\chi_f\\
&=s_3(f)\\
&\leqslant\sum_{F\text{奇异纤维}}(l_F-1)\\
&\leqslant\rho(S)-2 \qquad\qquad (\text{定理 } 2.1.5)\\
&\leqslant h^{1,1}(S)-2\\
&=b_2(S)-2p_g(S)-2\\
&=10p_g(S)-8(q(S)-1)-K^2_S,
\end{aligned}$$

整理后即得定理。 ∎

注 4.2.3 上述定理中的估计式只在 $q_f=0$ 时有意义，因为在下一节中，我们对 $q_f>0$ 的情形有更精确的结果。

在 f 光滑的情形，有下面的结论。

定理 4.2.4 设 $f: S \longrightarrow C$ 为一亏格 $g \geqslant 2$ 的光滑超椭圆纤维化。则 f 是解析纤维丛。

证明 这时 S 上存在一个处处有定义的超椭圆对合 σ，它的商空间 $P = S/\sigma$ 是 C 上的光滑相对极小直纹曲面。S 到 P 的投影在 P 上的分枝轨迹 R 是一个在 C 上平展的除子，所以横了一个平展基变换以后，我们可设 R 由 $2g+2 \geqslant 6$ 条截面组成。于是由引理 1.2.3 前面的注，P 是 C 上的平凡直纹，且 R 由水平截面组成。由此立即可知 f 是局部平凡的。∎

我们还可以根据下面的定理决定 S 的极小性。

定理 4.2.5 设 $f: S \longrightarrow C$ 为一相对极小的亏格二纤维化。如果 S 不是极小的，则 $C \cong \mathbf{P}^1$，$K^2_{S/C} \leqslant 8$，$\chi_f \leqslant 4$；如果进一步 S 是一般型曲面，则 $K^2_{S/C} = 8$，$\chi_f = 4$，$q_f = 0$。

证明 设 E 为 S 中的一条 (-1)-曲线，F 为 f 的一般纤维，$d = EF$。因为 E 到 C 的投影是满射，$C \cong \mathbf{P}^1$。由于

$$K_S E = E^2 = -1, \quad K_{S/C} E = 2d - 1.$$

我们有 $(dK_{S/C} - 2E)F = F^2 = 0$ 而 F 非数值等价于零，故由代数指标定理 $(dK_{S/C} - 2E)^2 \leqslant 0$，由此解得 $K^2_{S/C} \leqslant (8d^2 - 4d + 4)/d^2 \leqslant 8$，且等式仅当 $d = 1$ 时成立。然后由定理 4.2.1 知 $\chi_f \leqslant 4$。

进一步，设 S 为一般型曲面，并设 S' 为 S 的极小模型。由假设 $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$，故 $\chi_f \geqslant 2$。设 F' 为 F 在 S' 中的象。由于 F' 不是 (-2)-曲线，$0 < K_{S'} F' \leqslant K_{S/C} F - d$，故 $d = K_{S'} F' = 1$。由于 $F'^2 > 0$，$K^2_{S'} > 0$，由代数指标定理得 $K^2_{S'} = F'^2 = 1$，因此 S 到 S' 的双有理态射由一次爆发构成，从而 $K^2_{S/C} = 8$。特别地，E 是 S 中唯一的 (-1)-曲线，因此它在 S 的超椭圆对合下不变，即 $E|_F$ 为 F 上的 Weierstrass 点。这说明 $K_{S/C}$ 和 $2E$ 在 F 上的限制线性等价，因此 $K_{S/C} - 2E$ 线性等价于 S 上的一个垂直除子。而 $(K_{S/C} - 2E)^2 = 0$，故由 Zariski 引理，$K_{S/C} \equiv 2E + nF$（注意：亏格二的纤维化没有多重纤维，并且 $C \cong \mathbf{P}^1$），然后由 $K_{S/C} E = -E^2 = 1$ 知 $n = 3$。根据此得 $p_g(S') = H^0(K_{S/C} - 2F) \geqslant 2$，再由 Noether 不等式 $K^2_{S'} \geqslant$

$2p_g(S')-4$ 知 $p_g=2$。最后，由于 $K^2_{S'}<2p_g(S')$，我们有

$$q_f=q(S')=0([\text{Bo}],\ [\text{Ho3, V}]\text{或}[\text{De2}]).\quad ∎$$

虽然定理 4.2.1 和 4.2.2 确定了亏格二的纤维化的不变量之间的关系，但是对于给定的满足这些关系的一组不变量，纤维化的存在性仍然是地理学的一个重要问题，这一点现在尚未得到圆满的解决，除了在 $q_f>0$ 的特殊情形之外（见后面的 § 4.3），那里出现了一个有趣的"谱现象"：在 $K^2_{S/C}$ 的上下确界之间，不是每个整数值都能出现的。

在一般的情形，目前最有效的方法还是通过纤维扭曲和基变换，由一个给定的纤维化的例子去造出一系列新的纤维化，使它们的不变量能覆盖存在区域中的某一部分。对于任一亏格二的纤维化 $f:S\longrightarrow C$，我们总有一个 S 的 C-自同构，即它的超椭圆对合。它可以被用来构造基本纤维扭曲。设 $f':S'\longrightarrow C$ 为这样得到的一个基本纤维扭曲，F_1，F_2（对应地，F'_1，F'_2）为 f（或 f'）的扭曲纤维。设 (P, R, δ)、(P', R', δ') 分别为 f 和 f' 的亏格 2 数据组。则不难看出 $P=P'$，且 $R'-R=\pm H_1\pm H_2$，其中 H_i 为 F_i 在 P 中的象。于是关于纤维 F_i 的扭曲向量必为下列情形之一或其逆：

1) $s_3(F')=s_3(F)=0$，$s_2(F')=s_2(F)+10$，扭曲向量为 (1, 2)；

2) $s_3(F')=s_3(F)-1$，$s_2(F')=s_2(F)+12$，扭曲向量为 (1, 1)。

当 F_i 为 f 的一般纤维时，我们得到情形 1)；当 F_i 为一 $s_3(F)>0$ 的半稳定纤维时，得到情形 2)。因此，归纳起来有以下命题：

命题 4.2.6　设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 2 的纤维化，其每条纤维 F 都满足 $s_3(F)\leqslant 1$，且当 $s_3(F)=1$ 时 F 是半稳定的。则对于任意满足

$$K'\geqslant K^2_{S/C},\ \chi'\geqslant\chi_f,\ \chi'-\chi_f\equiv 0\pmod 2,$$
$$K'\geqslant 2\chi',\ \chi'-\chi_f\leqslant K'-K^2_{S/C}\leqslant 2(\chi'-\chi_f)$$

的整数对 (χ', K')，存在一个亏格 2 的纤维化 $f':S'\longrightarrow C$ 使得

$$\chi' = \chi_{f'},\ K' = K^2_{S'/C}.$$

然后结合适当的基变换，有以下推论。

推论 假设存在满足命题条件的纤维化 $f:S\longrightarrow C$，并且

$$b = g(C) \leqslant 1,\ \chi_f \equiv 1 \pmod 2.$$

则对于任意满足 $2\chi' \leqslant K' \leqslant \lambda_f\chi' - 2(\lambda_f - 1)^2\chi_f$，$\chi' \geqslant 3(\lambda_f - 1)\chi_f$（当 $\lambda_f > 4$，χ' 为奇数时），$b' \geqslant b$ 的整数组 (χ', K', b')，存在亏格 2 的纤维化 $f':S'\longrightarrow C'$，使得

$$\chi' = \chi_{f'},\ K' = K^2_{S'/C'},\ b' = g(C').$$

证明 设 $n \in \mathbf{Z}$ 为使得

$$n \equiv \chi' \pmod 2),\ n\chi_f \leqslant (K' - \chi')/(\lambda_f - 1)$$

的最大的正整数。由条件知 $n \geqslant 2$，因此存在一个关于 f 的 n 次不变基变换 $\pi: C' \longrightarrow C$，使得 $g(C') = b'$。设 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow C'$ 为 f 的拉回纤维化，则 $\chi_{\tilde{f}} = n\chi_f$，$K^2_{\tilde{S}/C'} = nK^2_{S/C}$，并且当 π 充分一般时，$\tilde{f}$ 满足命题的条件。而关于 $\tilde{f}$，整数对 (χ', K') 也满足命题的条件。∎

注 命题 4.2.6（因而其推论）中所构造的纤维化大都带有单连通纤维，所以基本群的垂直部分是退化的，特别地，$q_{f'} = 0$。

对于给定的亏格二纤维化 $f:S\longrightarrow C$，设 $(\hat{P}, \hat{R}, \hat{\delta})$ 如定义 4.1.4 中所述。对于研究 S 的基本群关于 f 的垂直部分，$\hat{R}$ 的非垂直连通分支具有特殊的意义。因此我们给出下面的结果，它与 $\pi_1(S)$ 的关系见定理 5.2.5 的推论 2。

引理 4.2.7 设 $\widehat{\mathscr{R}}$ 为 $\hat{R}$ 的非垂直连通分支之和，$\mathscr{R}_1$，…，$\mathscr{R}_t$ 为 $\widehat{\mathscr{R}}$ 的连通分支，F 为 $\hat{P}$ 在 C 上的一条一般纤维，$r_i = \mathscr{R}_i F$。当 r_i 均为偶数时，设 $\tau = t - 1$；否则，设 $\tau = t - 2$。则 $0 \leqslant \tau \leqslant 4$，且当 $\tau = 4$ 时 $\lambda_f = 7$，$\tau < 4$ 时 $\lambda_f \geqslant \tau + 2$。

证明 我们对 τ 的各种可能性分别加以研究。

a) $\tau = 4$：这时必有 $t = 6$，$r_1 = \cdots = r_6 = 1$。由此立即可以推出 $s_2(f) = 0$，因此由定理 4.2.1，$\lambda_f = 7$。

b) $\tau = 3$：这时 $\hat{R}$ 的主部 $\hat{R}_p$ 有一个分解 $\hat{R}_p = \hat{R}_1 + \hat{R}_2$，其中 $\hat{R}_1$ 和 $\hat{R}_2$ 都是有效除子，$\hat{R}_1 F = \hat{R}_2 F = 3$。设 R_1、R_2 分别为 $\hat{R}_1$、

$\hat{R}_2$ 在 P 中的象，n_1、n_2 为两个有理数，使得

$$R_1 \sim -1.5K_{P/C} + n_1F,\ R_2 \sim -1.5K_{P/C} + n_2F$$

(见定理 4.1.8 的证明)。于是 $n = n_1 + n_2$，$R_1R_2 = 3(n_1 + n_2) = 3n$，这里 n 如公式(4.1)所定义。由假设 R_1 和 R_2 只能在 R 的不可忽略奇点相交，而在这样的一个奇点该相交数要么是 0，要么是 4，所以

$$s_3(f) \geqslant \frac{1}{4} R_1R_2 = \frac{3}{4}n.$$

然后由定理 4.1.8，$\lambda_f = 1 + n/(n - s_3) \geqslant 5$。

c) $\tau = 2$，这里有两种可能：要么 $\hat{R}_p = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{R}_3$，使得 $\hat{R}_iF = 2$，要么 $\hat{R}_p = \hat{R}_1 + \hat{R}_2$，使得 $\hat{R}_iF = 3$。后一种可能已由 b) 证明 $\lambda_f \geqslant 5$，我们只需考虑前一种可能。设 $R_i (i = 1, 2, 3)$ 为 $\hat{R}_i$ 在 P 中的象，n_1，n_2，n_3 使

$$R_i \sim -K_{P/C} + n_iF,\ i = 1, 2, 3;\ n = n_1 + n_2 + n_3.$$

不妨设 $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$，即 $R_1R_2 \geqslant \frac{4}{3}n$。因为在 R 的每个不可忽略奇点 R_1 和 R_2 的相交数最多是 2，我们得到

$$s_3(f) \geqslant \frac{2}{3}n,\ 或\ \lambda_f = 1 + n/(n - s_3) \geqslant 4.$$

d) $\tau = 1$，这时有 $\hat{R}_p = \hat{R}_1 + \hat{R}_2$，$\hat{R}_1F = 2$，$\hat{R}_2F = 4$。如前设 R_1 与 R_2 以及 n_1、n_2 使

$$R_1 \sim -K_{P/C} + n_1F,\ R_2 \sim -2K_{P/C} + n_2F,$$

我们有 $R_1R_2 = 4n_1 + 2n_2 \geqslant 2n$。在 R 的一个不可忽略奇点，R_1 和 R_2 的相交数最多为 4，故

$$s_3(f) \geqslant \frac{1}{2}n,\ 或\ \lambda_f \geqslant 3.\ \blacksquare$$

§ 4.3 不规则纤维化的分类

这一节的目的是给满足 $q_f > 0$ 的亏格 2 纤维化 $f: S \longrightarrow C$ 进行分类。事实上，由定理 2.4.10，$q_f = 2$ 的纤维化是平凡的，而在

$q_f=1$ 时，如果 f 是常模的，则定理 2.8.9 说明 f 的不变量可以很容易地从纤维扭曲得到，因此我们只需要考虑 f 为变模的情形。

这一节的讨论基本上遵循[X2]第三章的方法，但叙述方式作了一定的改进。

如引理 2.4.11 的证明中一样，设 $\varepsilon:\mathscr{E}\longrightarrow C$ 为 f 的雅可比簇纤维化的常值部分。ε 是一个椭圆纤维丛。S 的 Albanese映射诱导 C 上的一个态射 $\tau: S\longrightarrow\mathscr{E}$，它是一般有限的。

定义 4.3.1 τ 的次数 d_f 是一个 $\geqslant 2$ 的整数，称为 f 的伴生次数。

例 4.3.2 伴生次数为 2 的不规则纤维化是很容易构造的：设 $e:\mathscr{E}\longrightarrow C$ 为一椭圆纤维丛，(B, δ) 为 $\mathscr{E}$ 上的一组(奇异)二次覆盖数据，其中 B 与 ε 的纤维相交为 2. 设 $S\longrightarrow\mathscr{E}$ 为对应的二次覆盖，$f:S\longrightarrow C$ 为诱导的亏格 2 纤维化。注意，B 中最多只有不相切的三重点，所以它没有不可忽略奇点。从而 f 为相对极小，且

$$K_{S/C}^2=2\delta^2,\ \chi_f=\delta^2/2,\ \lambda_f=4.$$

显然 f 是变模的当且仅当 B 的非垂直部分到 C 的投影不是平展的。我们有 $q_f\geqslant q_\varepsilon=1$，所以只要 f 不是平凡的，$q_f=1$。$d_f=2$ 可由雅可比簇的泛性质直接看出。

反之，由定义直接可知所有伴生次数为 2 的不规则纤维化都可以这样构造出来。

设 F 为 f 的一条光滑纤维，$J(F)$ 为 F 的雅可比簇，$E=\tau(F)$ 为 ε 的对应纤维，τ_F 为 τ 在 F 上的限制。注意 E 作为阿贝尔簇在选定零点后是唯一确定的，且不依赖于 F 的选取。我们有 $d_f=\deg\tau_F$，且 τ_F 有分解：

$$\begin{array}{ccc} & J(F) & \\ {\scriptstyle\iota}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\psi_F} \\ F & \xrightarrow{\quad\tau_F\quad} & E\end{array}$$

其中 ι 为 F 到其雅可比簇中的嵌入，ψ_F 由 $J(F)$ 的泛性质诱导。

设 E_F 为 ψ_F 的核，$V=H^1(J(F), \mathbf{C})\cong\mathbf{C}^2$，$U=H^1(J(F),$

$\mathbf{Z}$)为V中的一个格。则$V_1=H^1(E_F,\mathbf{C})$为V的一个1维子空间。设$U_1=U\cap V_1$。另一方面，$J(F)$上的主极化对应于V上的一个幺模反对称实二次形式$\langle,\rangle$(参见[Mu3]的第一章)，设V_2为V_1在这个二次形式下的正交补，$U_2=U\cap V_2$。U_2是V_2中的一个格，因此$J(F)$中有子群$E_c=V_2/U_2$，使得$J(F)=E_F+E_c$，且

$$G=E_F\cap E_c\cong U/(U_1+U_2)$$

为一离散子群。

引理4.3.8 $G\cong\mathbf{Z}_d\oplus\mathbf{Z}_d$，其中$d$为$f$的伴生次数。因此$G$作为$E_F$和$E_c$的子群分别为这两个群中$d$阶元所成的子群$E_{F,d}$和$E_{c,d}$。

证明 在V上取一组坐标，使得U_1由$(z_1,0)$、$(1,0)$生成，U_2由$(0,z_2)$、$(0,1)$生成，其中z_1、$z_2\in\mathscr{H}$。我们仍用F记它在ι下的象，则$FE_F=d$。因为F是$J(F)$的主极化的一个Θ除子，这意味着$\langle(z_1,0),(1,0)\rangle=d$。

另一方面，由$\langle,\rangle$的幺模性和U_1、U_2的正交性知必有两个元素g_1、$g_2\in U$，使得

$$\langle(z_1,0),g_1\rangle=\langle g_2,(1,0)\rangle=1,$$
$$\langle(z_1,0),g_2\rangle=\langle g_1,(1,0)\rangle=0.$$

于是g_1和g_2在G中的象是两个互相独立的d阶元，且对任一$u\in U$，设$m=\langle(z_1,0),u\rangle$，$n=\langle u,(1,0)\rangle$，则置$u'=u-mg_1-ng_2$，我们得$\langle(z_1,0),u'\rangle=\langle u',(1,0)\rangle=0$，故$u'\in U_1+U_2$。换言之$g_1$和$g_2$的象生成$G$。▮

我们回忆(引理2.4.11)$R^1f_*\mathcal{O}_S=f_*\omega_{S/C}^\vee$有一个同构于$\mathcal{O}_C$的直和因子$\mathscr{L}$。我们可以把$\mathscr{L}$看成$C$上的线丛，因此$\mathscr{L}=C\times V_c$，其中$V_c\cong\mathbf{C}$。现在$R^1f_*\mathcal{O}_S$是对应于$f$的雅可比簇纤维化的李代数纤维化，而$V_c$在每个纤维上恰为该纤维的雅可比簇的常值部分的李代数，所以与上述V_2一致。于是关于所有纤维的U_2与U_2'，这里U_2'是格U在分解$V=V_1\oplus V_2$下在V_2中的投影(因此$U_2'/U_2=G$)，构成$\mathscr{L}$的一个离散子群层，它们显然都是常层。所以这两个层在$\mathscr{L}$的第二投影$p_2:\mathscr{L}\longrightarrow V_c$下的象$U_c$和$U_c'$都是$V_c$

中的格，使得 $U_c'/U_c=E_{c,d}\cong G$。

固定一个同构映射 $\psi:U_c'/U_c\longrightarrow\mathbf{Z}_d\oplus\mathbf{Z}_d$。则对于 f 的任一光滑纤维 F，我们通过上述 G 与 U_c'/U_c 的同构得到一个唯一确定的同构 $\alpha_F:E_{F,d}\longrightarrow\mathbf{Z}_d\oplus\mathbf{Z}_d$。于是 (E_F,α_F) 是一条级 d 的椭圆曲线，即 ψ 确定了一个映射 $\mu':C'\longrightarrow\mathscr{M}_{1,d}$，这里 C' 为 f 的所有光滑曲线的象。μ' 可以唯一地拓展到 $\mu:C\longrightarrow\overline{\mathscr{M}}_{1,d}$。而由 §1.2，$\mathscr{M}_{1,d}=\mathscr{H}/\Gamma(d)=C_d$ 是一条模曲线。因为我们假设 f 不是常模的，μ 是满射。所以已经证明了下述定理的前一部分。

定理 4.3.4 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一变模亏格 2 纤维化，满足 $q_f=1$。设 $d=d_f$ 为 f 的伴生次数，$\mathscr{L}=C\times V_c$ 为 $R^1f_*\mathcal{O}_S$ 的常值部分，U_c'（相应地，U_c）为 $R^1f_*\mathbf{Z}$（相应地 $R^1f_*\mathbf{Z}\cap\mathscr{L}$）在 V_c 中的投影。则 U_c' 和 U_c 都是 V_c 中的格，并且存在同构 $\psi:U_c'/U_c\longrightarrow\mathbf{Z}_d\oplus\mathbf{Z}_d$。

给定 ψ 后，存在唯一的一个映射 $\mu:C\longrightarrow C_d$，这里 C_d 是关于主同余子群 $\Gamma(d)$ 的模曲线，使得对于 f 的任一光滑纤维 F，若 $p=f(F)$，则 $\mu(p)=[(E_F,\alpha_F)]$，这里 E_F 是 F 的雅可比簇到常值部分 V_c 的自然映射的核，α_F 是 ψ 诱导的一个同构映射

$$\alpha_F:E_{F,d}\longrightarrow\mathbf{Z}_d\oplus\mathbf{Z}_d.$$

反之，设 $d\geqslant3$。则给定一条椭圆曲线 E_c 以及一个同构映射 $\psi_d:E_{c,d}\longrightarrow\mathbf{Z}_d\oplus\mathbf{Z}_d$，存在唯一的一个满足 $q_{fd}=1$ 的半稳定亏格 2 纤维化 $f_d:S_d\longrightarrow C_d$ 使得 $V_c/U_c=E_c$，且上述底映射

$$\mu_d:C_d\longrightarrow C_d$$

为恒等映射，不仅如此，任一满足 $q_f=1$，伴生次数为 d，常值部分为 E_c 且 $\psi=\psi_d$ 的亏格 2 纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 都是 f_d 在基变换 μ 下的拉回。特别地，伴生次数 $\geqslant3$ 的不规则亏格 2 纤维化都是半稳定的。我们有

$$\chi_{fd}=d\Delta_d,\quad K^2_{S_d/C_d}=(7d-6)\Delta_d,$$

其中 Δ_d 如公式(A1)所定义。

根据上述原因，我们把 f_d 称为伴生次数为 d 的泛纤维化。

证明 我们只要证明后一部分的断言。

设 $U_c=\langle z_c,1\rangle$，其中 $z_c\in\mathscr{H}$。考虑上半平面 $\mathscr{H}$ 上的向量丛 $\mathscr{V}=\mathscr{H}\times\mathbf{C}^2$ 中，如下定义的 6 个截面 $u_1,\cdots,u_6$：对每个 $z\in\mathscr{H}$，有

$$u_1(z)=(z,0),\ u_2(z)=(0,z_c),$$
$$u_3(z)=(1,0),\ u_4(z)=(0,1),$$
$$u_5(z)=\frac{u_3+u_2}{d}=\left(\frac{1}{d},\ \frac{z_c}{d}\right),$$
$$u_6(z)=\frac{u_1+u_4}{d}=\left(\frac{z}{d},\ \frac{1}{d}\right).$$

这 6 个截面生成 $\mathscr{V}$ 中的一个离散子群层 $\mathscr{U}$，使得

$$j:\mathscr{J}=\mathscr{V}/\mathscr{U}\longrightarrow\mathscr{H}$$

成为 $\mathscr{H}$ 上的一个阿贝尔曲面。

另外，$\mathscr{V}$ 上有一个反对称实二次形式 $\langle,\rangle$，使得

$$\langle u_1,u_3\rangle=\langle u_2,u_4\rangle=d,$$
$$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_1,u_4\rangle=\langle u_2,u_3\rangle=\langle u_3,u_4\rangle=0.$$

这个二次形式在限制在 $\mathscr{U}\times\mathscr{U}$ 上是幺模整形式，所以它定义了 $\mathscr{J}$ 上的一个主极化。关于 $\mathscr{H}$ 的每一个点 z，j 在 z 上的纤维关于这个主极化有一个 Θ 除子，它是在平移下唯一确定的一条亏格 2 曲线。所以这些 Θ 除子构成 $\mathscr{H}$ 上的一个亏格 2 纤维化

$$\phi:\mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{H}.$$

现在考虑 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的主同余子群 $\Gamma(d)$ 在 $\mathscr{V}$ 上的作用，设

$$\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(d),$$

则
$$\gamma(z,z_1,z_2)=\left(\gamma z,\ \frac{z_1}{cz+d},\ z_2\right).$$

通过直接验算可知 $\mathscr{U}$ 在 $\Gamma(d)$ 的这个作用下保持不变，所以这诱导了 $\Gamma(d)$ 在 $\mathscr{J}$ 上的一个作用。注意，如果 z 和 z' 是 $\mathscr{H}$ 中属于 $\Gamma(d)$ 的同一个轨道的两个点，则存在唯一的一个 $\gamma\in\Gamma(d)$ 把 $j^{-1}(z)$ 映到 $j^{-1}(z')$。且 $\Gamma(d)$ 在 $\mathscr{V}$ 上的作用保持二次形式 $\langle,\rangle$ 不变，所以这个作用保持 ϕ 的纤维的主极化不变。又由于主极化的 Θ 除子在平移意义下的唯一性，我们得到 $\Gamma(d)$ 在 S 上的诱导作

用。

设S'_d为$\mathscr{S}$在$\Gamma(d)$的这个作用下的商。则ϕ诱导一个亏格2的纤维化

$$f'_d: S'_d \longrightarrow C'_d,$$

这里$C'_d = \mathscr{H}/\Gamma(d)$，它可以拓展到一个纤维化$f_d: S_d \longrightarrow C_d$。$f_d$显然是不规则的，且伴生次数为$d$。

根据§2.8中关于等模单值的讨论及本定理的前二部分，为证f_d的泛性质，只需证明f_d的纤维没有在雅可比簇的常值部分上平凡的非平凡自同构。但这从上述Θ除子在平移意义下的唯一性以及雅可比簇的李代数V在上述分解$V = V_1 \oplus V_2$下，没有保持格U和二次形式$\langle , \rangle$不变并在V_2上平凡的自同构直接看出。

现在我们来证明f_d的半稳定性。首先由于$\Gamma(d)$在$\mathscr{H}$上的作用是自由的，f'_d的所有纤维的 Picard-Lefschetz 单值都是平凡的，因此由定理2.8.5，f'_d是半稳定的。故设$p \in C_d$为一尖点。又由于存在一个$\gamma \in SL(2, \mathbf{Z})$把$p$变到$\infty$，$f_d$的所有尖点纤维都同构。所以我们可设$p = \infty$。

现设Γ为C_d上顺时针绕∞一圈的一个小环路，$\tilde{\Gamma}$为Γ在$\mathscr{H}$中的一个拉回。则$\tilde{\Gamma}$是从一点$z \in \mathscr{H}(\mathrm{Im}(z) \gg 0)$出发，到$z - d$终止的一条水平道路。于是设$F$为$f_d$在点$z$上的纤维，并如下取$H^1(F, \mathbf{Z})$的一组标准基：

$$\alpha_1 = u_3,\ \alpha_2 = u_4,\ \beta_1 = -v_6,\ \beta_2 = -u_5,$$

f_d关于∞的 Picard-Lefschetz 单值在这组基下的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

由定理2.8.5，f_d在∞上的纤维是半稳定的。

不仅如此，例2.8.3说明f_d在每个尖点上恰有一个不分离二重点。因此由定理4.1.6与引理A2.5，

$$s_2(f_d) = t_d = 12\Delta_d.$$

另一方面，我们有一个分解 $\mathscr{V}=\mathscr{V}_1\oplus\mathscr{V}_2$，这里 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$ 分别为 u_3 和 u_4 生成的饱和子层。$\Gamma(d)$ 保持此分解不变，而 $\mathscr{V}/\Gamma(d)$ 可以自然地拓展为 $R^1f_{d*}\mathcal{O}_{S_d}$(引理 2.4.6)。因此我们有一个直和分解

$$R^1f_{d*}\mathcal{O}_{S_d}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2,$$

其中 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 分别对应于 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$，于是 $\mathscr{L}_2\cong\mathcal{O}_{C_d}$。而由构造，$\mathscr{L}_1$ 同构于 C_d 上级 d 的椭圆曲线的泛族的李代数丛，故 $\deg\mathscr{L}_1$ 等于关于 $\Gamma(d)$ 的权为 -1 的模函数的次数。于是由引理 A2.8，

$$\chi_{f_d}=-\deg\mathscr{L}_1=d\Delta_d.$$

最后通过定理 4.1.8 解得

$$s_3(f_d)=(5d-6)\Delta_d, \tag{4.5}$$

定理得证。∎

推论　设 $f:S\longrightarrow C$ 为一伴生次数为 d 的不规则变模亏格 2 纤维化。则

$$\lambda_f=7-\frac{6}{d}.$$

特别地，取 $d=5$，则 $\Delta_d=1$，$g(C_d)=0$，$\chi_{f_d}=5$ 为奇数，并且由[X2]的定理 3.16，f_5 满足命题 4.2.6 的条件，故由该命题的推论及其后面的注，我们得以下定理：

定理 4.3.5　对任一满足

$$2\chi\leqslant K\leqslant5.8\chi-230.4,\ \chi\geqslant72,\ b\geqslant0$$

的整数组 (χ, K, b)，存在亏格 2 的纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 使得

$$\chi_f=\chi,\ K^2_{S/C}=K,\ g(C)=b,\ q_f=0.$$

§ 4.4　例

例 4.4.1　伴生次数为 3 的不规则泛纤维化 $f_3:S_3\longrightarrow C_3$ 可以直接通过典范覆盖的分枝除子构造出来。注意，因为

$$g(C_3)=0,\ \Delta_3=\frac{1}{3},$$

一个纤维化 $f:S\longrightarrow C\cong \mathbf{P}^1$ 为伴生次数为 3 的泛纤维化当且仅当

$$K_{S/C}^2=5,\ f_*\omega_{S/C}\cong \mathcal{O}_C\oplus\mathcal{O}_C(1).$$

因此，若 (P, R, δ) 为对应于 f 的亏格 2 数据组，P 是射影平面 $\mathbf{P}^2$ 关于一个点 x 的爆发。

注意，由于 $s_3(f)=3$ 为奇数，R 在 $\mathbf{P}^2$ 中的像 D 至少包含一条过 x 的直线。

考虑 $\mathbf{P}^2$ 中如下图所示的直线组合：

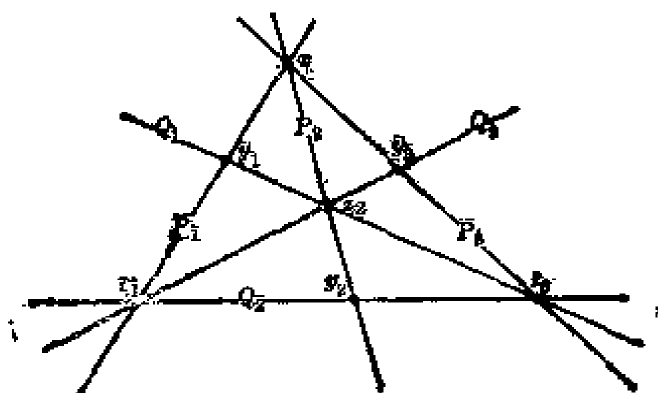


图 4.4 $\mathbf{P}^2$ 中的直线

其中 P_1、P_2、P_3 为过 x 的三条直线，Q_1、Q_2、Q_3 为另外三条直线，它们的交点 z_1、z_2、z_3 分别在 P_1、P_2 和 P_3 上。考虑 $\mathbf{P}^2$ 中的三个除子 $D_1=P_1+Q_1+2L(y_2, y_3)$、$D_2=P_2+Q_2+2L(y_1, y_3)$、$D_3=P_3+Q_3+2L(y_1, y_2)$，其中 $L(y_i, y_j)$ 为过 y_i 和 y_j 的直线。这三个除子生成 $\mathbf{P}^2$ 上的一个网(二维线性系)W，因此由 Bertini 定理，W 中的一个一般元 D 为一个既约且不可约的 4 次除子，它在 y_1、y_2、y_3 上分别有一个二重点，含 x 和 z_i 作为光滑点，且无其他奇异点。现在设 R 为 $D+P_1+P_2+P_3+Q_1+Q_2+Q_3$ 在 P 中的严格原象，则存在唯一的 δ 使得 (P, R, δ) 为一组亏格二数据使得 $s_2=4$、$s_3=3$，因此对应的亏格二纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 是一个伴生次数为 3 的泛纤维化。

注意，因为 D 是在一个网中选取的，所以它依赖于两个参量。模去 $\mathbf{P}^2$ 上保持图 4.4 的构形不变的自同构（一维），上述构造构成一个一维的参量簇。于是由定理 4.3.4，所有伴生次数为 3 的

泛纤维化都可以通过这样的构造得到。

在本节余下的例子中，我们的兴趣集中于亏格 2 纤维化的"起点"：具有最小不变量值的纤维化。具体的标准是考虑满足

$$g(C)=0,\ \chi_f=2$$

的纤维化(因为 $\chi_f=1$ 是不规则纤维化)。我们试图通过这些例子说明，对所有这样的纤维化进行分类是饶有趣味的并且是可行的，从中可以得到一些很有意思的几何对称现象。

注意由于第 3 节中关于不规则纤维化的完整分类，值得研究的只有满足 $q_f=0$ 的这样的纤维化 $f:S\longrightarrow C$。这里的曲面 S 满足

$$p_g(S)=q(S)=0,\ -4\leqslant K_S^2=K_{S/C}^2-8\leqslant 2$$

(定理 4.2.1, 4.2.2)，其中最有趣的是当 S 为一般型曲面的情形，即当 $9\leqslant K_{S/C}^2\leqslant 10$ 时(定理 4.2.5)。通过考虑超椭圆覆盖的分枝轨迹的不同的分解可能性，翁林提供了这样的纤维化的一个分类。

定义 4.4.2　设 D 为 $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 中的一个除子。存在两个唯一确定的整数 m、n 使得 $D\equiv p_1^*\mathcal{O}(m)+p_2^*\mathcal{O}(n)$。我们称数对 (m,n) 为 D 的次数。

对于一个满足 $p_g(S)=q(S)=0$ 的亏格二纤维化 $f:S\longrightarrow C$，设 $(P\cong\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1,\ R,\ \delta)$ 为对应的亏格二数据组，$\hat{R}_p$ 为 $\hat{R}$ 的主部。设 $\hat{R}_p=R_1+\cdots+R_n$ 为 $\hat{R}_p$ 的连通分支分解，(m_i,n_i) 为 R_i 在 P 中的象的次数。则 f 的型定义为 $\{(m_1,n_1),\cdots,(m_n,n_n)\}$。取 P 的投影次序使得

$$m_1+\cdots+m_n=K_{S/C}^2-2,\ n_1+\cdots+n_n=6.$$

定理 4.4.3(翁林，[W1])　当 $K_{S/C}^2=9$ 时，f 的型必为下述之一：

$$\{(7,6)\},\ \{(2,2),(5,4)\};$$

而当 $K_{S/C}^2=10$ 时，f 可能的型为：

$$\{(1,1),(7,5)\},\ \{2\times(4,3)\},$$

$$\{2\times(1,1),(6,4)\},\ \{(1,1),(3,2),(4,3)\},$$

$$\{3\times(1,1),(5,3)\},\{2\times(1,1),2\times(3,2)\},$$
$$\{4\times(1,1),(4,2)\}.$$

注 4.4.4 1) 在上述的可能性中，除了下面给出的例子外 f 的存在性尚未得到证明。

2) 根据下一章中定理 5.2.5 的推论 1，S 的挠 2 商由 f 的型唯一确定。

3) 翁林的原始文献[W1]中的分类是以 R_φ 的不可约分支来表示的，且其中计算有误，因为下面例 4.4.5 的情形被忽略了。

例 4.4.5[OP] $K^2_{S/C}=9$(即 $K^2_S=1$)，S 的挠群为 $\mathbf{Z}_2$。

Oort 和 Peters 考虑了 $\mathbf{P}^2$ 中由下列方程所定义的两条二次曲线 Q_1、Q_2 以及两条三次曲线 C_1、C_2：

$$Q_1: Y^2+(X-1)(2X-3-2Y)=0,$$
$$Q_2: Y^2+(X-1)(2X-3+2Y)=0,$$
$$C_1: Y^2+X(X-1)(X-3)=0,$$
$$C_2: (2-X)C_1+(X^2-3X+3)^2=0.$$

它们的和 $D=Q_1+Q_2+C_1+C_2$ 是一条 10 次曲线。Q_1 和 Q_2 通过点 $p=\left(\frac{3}{2},0\right)$，而 C_2 在 p 上有一个二重点，因此 p 是 D 的一个 4 重奇点。D 还在平面的另外五个点上有(3→3)型奇点，这五个点分别为

$$p_1=(1,0),\ p_2=(x_+,x_+),\ p_3=(x_-,x_-),$$
$$p_4=(x_+,x_-),\ p_5=(x_-,x_+),$$

这里

$$x_+=\frac{3+\sqrt{-3}}{2},\quad x_-=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}.$$

D 通过这五个点的不可约分支分别为

$$\{Q_1,Q_2,C_1\},\{C_1,C_2,Q_1\},\{C_1,C_2,Q_1\},$$
$$\{C_1,C_2,Q_2\},\{C_1,C_2,Q_2\}.$$

最后，C_1 和 C_2 在 x，y 座标的无穷远处还相交于一个二重点。

通过二次覆盖的公式及 Persson 向量的计算，$\mathbf{P}^2$ 的以 D 的极

小偶解消为分枝轨迹的二次覆盖 S 为一满足 $p_g=q=0$、$K_S^2=1$ 的极小曲面。$\mathbf{P}^2$ 中以 p 为基点的直线丛在 S 上的严格原象构成 S 中的一个亏格二曲线丛，它所对应的纤维化 $f:S\longrightarrow C\cong\mathbf{P}^1$ 即满足 $K_{S/C}^2=9$。设 $(P\cong\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1, R, \delta)$ 为对应于 f 的亏格二数据组。则 Q_1，Q_2，C_1，C_2 自然地对应于 R_p 的四个不可约分支 R_1，R_2，R_3，R_4，它们的次数分别为 $(1,1)$，$(1,1)$，$(2,3)$，$(3,1)$。因为 R_1，R_2 和 R_3，R_4 分别同属一个连通分支，f 的型是 $\{(2,2),(5,4)\}$。

Oort 和 Peters 证明了 S 的 3-典范线性系不含基点，因此根据 Miyaoka 的一个定理（[Mi1]，Theorem 2′），S 的挠群由二阶元构成。我们可以用下一章中定理 5.2.5 的推论 1 直接得出 S 的挠 2 商的秩为 1，因为 $\hat{R}$ 的非垂直连通分支恰为 R_1+R_2 和 R_3+R_4 的原象。

例 4.4.6[X1]　$K_{S/C}^2=10$，S 的挠群为 $\mathbf{Z}_2^3$。

考虑 $P=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 中的四条 $(1,1)$ 曲线 $C_1,\cdots,C_4$，它们的方程为

$$C_1: x=y,\ C_2: x=-y,\ C_3: xy=1,\ C_4: xy=-1,$$

这里 $x, y\in\mathbf{P}^1=\mathbf{C}+\{\infty\}$ 分别为 P 的关于两个分量的坐标。这四条曲线共有 12 个普通二重交点，即

$$(0,0),(\infty,\infty),(0,\infty),(\infty,0),$$
$$(\pm1,\pm1),(\pm\sqrt{-1},\pm\sqrt{-1}).$$

设 $F_1,\cdots,F_6$ 分别为 $0,\infty,1,-1,\sqrt{-1},-\sqrt{-1}\in\mathbf{P}^1$ 在 P 到第一个因子的投影 $\varphi:P\longrightarrow\mathbf{P}^1$ 下的原象，因此每条 F_i 包含两个二重点。P 上有三个 $(4,2)$ 次的除子

$$D_1=C_1+C_2+F_1+F_2,\ D_2=C_1+C_3+F_3+F_4,$$

$$D_3=C_2+C_3+F_5+F_6,$$

它们没有公共分支，并且都包含上述 12 个二重点。因此由 Bertini 定理，在由 D_1，D_2，D_3 生成的线性系中有一个 $(4,2)$ 次的既约光滑除子 D，它通过所有 12 个二重点。设

$$R=\sum_{i=1}^{4}C_i+\sum_{i=1}^{6}F_i+D$$

并取 φ 为 P 上的给定直纹，我们可以由此建立一组亏格 2 数据 (P, R, δ)，对应的纤维化 $f: S\longrightarrow C$ 满足 $s_2=8$，$s_3=6$。同时，f 的型为 $\{4\times(1, 1), (4, 2)\}$，从而由定理 5.2.5 的推论 1，$S$ 上的 2-挠群为 $\mathbf{Z}_2^2$。由于满足 $p_g=q=0$，$K^2=2$ 的曲面的挠群最多为 10 阶[B2]，S 的挠群全由二阶元组成。

例 4.4.7[X2]　$K^2_{S/C}=10$，S 的挠群为 $\mathbf{Z}_3^2$。

采用 § A2 中的记号，设 $\mathscr{H}$ 为复平面的上半平面，考虑群

$$G=\Gamma(3)\times\Gamma(3)$$

在 $\mathscr{P}=\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ 上的作用，这里对于 $(\alpha, \beta)\in G$ 和 $(z_1, z_2)\in\mathscr{P}$，$(\alpha, \beta)(z_1, z_2)=(\alpha(z_1), \beta(z_2))$。商空间 $B=\mathscr{P}/G$ 为模曲线的积 $B=C_3'\times C_3'$。设 $\mathscr{V}=\mathscr{P}\times\mathbf{C}^2$ 为 $\mathscr{P}$ 上的平凡丛，$\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{V}$ 中的一个离散子群层，定义为对于 $z=(z_1, z_2)\in\mathscr{P}$，$\mathscr{U}$ 在 z 上的纤维由

$$u_1(z)=(z_1, 0),\ u_2(z)=(0, z_2),$$

$$u_3(z)=(1, 0),\ u_4(z)=(0, 1),$$

$$u_5(z)=\frac{u_3+u_2}{d}=\left(\frac{1}{d}, \frac{z_2}{d}\right),$$

$$u_6(z)=\frac{u_1+u_4}{d}=\left(\frac{z_1}{d}, \frac{1}{d}\right)$$

生成。和定理 4.3.4 的证明一样，G 在 $\mathscr{P}$ 上的作用可以拓展到 $\mathscr{V}$ 上的一个作用，使得 $\mathscr{U}$ 在这个作用下不变。设 V 和 U 分别为 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{U}$ 在这个作用下的商。则 $A=V/U$ 成为 B 上的一个主极化阿贝尔曲面丛。

注意，$C_3\cong\mathbf{P}^1$，P 可以正则地看成 $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 中的一个 Zariski 开集。设 $C\cong\mathbf{P}^1$ 为 $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 中的一条充分一般的 (1, 1) 次曲线，C' 为 C 在 P 上的限制。于是 A 限制在 C' 上也是一个主极化阿贝尔曲面丛，因此可以和定理 4.3.4 的证明一样，设 $f': S'\longrightarrow C'$ 为 A 的 Θ 除子纤维化。f' 是 C' 上的亏格二纤维化，它可以唯一地拓展到 C 上的一个纤维化 $f: S\longrightarrow C$。和 §4.3 一样的计算可知

f 是半稳定的，并且 $C\cong\mathbf{P}^1$, $\chi_f=2$, $K^2_{S/C}=10$.

为了计算 S 的挠群，注意 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 生成 $\mathscr{V}$ 的另一个在 G 的作用下不变的离散子群层 $\widetilde{\mathscr{U}}$，使得 $\widetilde{A}=V/\widetilde{U}$ 为 B 上的阿贝尔曲面丛，且 $\widetilde{U}$ 到 U 中的嵌入诱导一个 Galois 群为 $\mathbf{Z}_3^2$ 的 9 次 Galois 平展覆盖 $\varepsilon:\widetilde{A}\longrightarrow A$。限制到 C' 上并取 Θ 除子，我们得到一个 9 次平展覆盖 $\rho:\widetilde{S}'\longrightarrow S'$，且 f' 的纤维在 ρ 下的原象都是连通的。因此有诱导纤维化 $\tilde{f}':\widetilde{S}'\longrightarrow C'$，它可以唯一地拓展到 C 上的一个相对极小纤维化 $\tilde{f}:\widetilde{S}\longrightarrow C$。Picard-Lefschetz 单值说明 $\tilde{f}$ 是半稳定的。通过简单的计算，不难看出 ρ 所诱导的 $\widetilde{S}$ 到 S 的有理映射是一个态射，并且是平展的。因此 S 的挠群有一个同构于 $\mathbf{Z}_3^2$ 的商群。但 S 的挠群至多为 10 元群[B2]，所以 $\mathbf{Z}_3^2$ 即为该挠群。

注意，通过例 4.4.1 中关于伴生次数为 3 的不规则泛纤维化的描述，不难看出 f 的型为 $\{2\times(4, 3)\}$。

例 4.4.8[W1]　$K^2_{S/C}=10$；S 的挠群的挠 2 部分为 $\mathbf{Z}_2^2$.

设 a、b 为两个复数，满足 $a\neq 0, \pm 1$, $b\neq 0$, $ab\neq a+1$。考虑 $P=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$，设 x、$y\in\mathbf{P}^1=\mathbf{C}+\{\infty\}$ 分别为 P 的关于两个分量的坐标。设 $C_i(i=1, \cdots, 4)$ 为 P 中由下列方程定义的曲线：

$$C_1: xy=1;$$

$$C_2: xy=a;$$

$$C_3: abx^3+ab(a+1)x+(a+1)^2y=(a+1)xy^2;$$

$$C_4: (a+1)y^2+(a+1)bx^2y^2+(a+1)bx^3y=abx^2.$$

这四条曲线的次数分别为 $(1, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 2)$。除子 $R_0=C_1+C_2+C_3+C_4$ 在下列点上有三重奇点：

$$(0, 0), (0, \infty), (\infty, 0), (\infty, \infty),$$

$$(\alpha_i, 1/\alpha_i), (\alpha_i, a/\alpha_i), i=1, \cdots, 4$$

其中 $\alpha_i(i=1, \cdots, 4)$ 为下述方程的根：

$$bx^4+(a+1)bx^2+(a+1)=0.$$

并且 R_0 没有其它的奇点。设

$$R=R_0+p_1^*(0+\infty+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),$$

则关于纤维化 $p_1:P\longrightarrow C=\mathbf{P}^1$ 和满足 $2\delta\equiv R$ 的 δ, (P, R, δ) 构成一组亏格二数据，它所对应的亏格二纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 满足

$$\chi_f=2,\ K_{S/C}^2=10.$$

同时，$C_1, \cdots, C_4$ 在 $\hat{P}$ 中的原象构成 $\hat{R}$ 的非垂直连通分支，因此，由定理 5.2.5 的推论 1，$\mathscr{V}_f=\pi_1(S)$ 的挠 2 商为 $\mathbf{Z}_2^2$. f 的型为 $\{2\times(1,1), 2\times(3,2)\}$.

例 4.4.6[W2]　$K_{S/C}^2=10$, S 的挠群的挠 2 部分为 $\mathbf{Z}_2^2$.

设 P, x, y 如上例所设，并设 a 为一复数，$a\neq\pm1$, $\pm\sqrt{-1}$. 对任一 $c\in\mathbf{P}^1=\mathbf{C}\cup\infty$，设 F_c 为 $P=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 的第一个投影 p_1 在 c 上的纤维。考虑 P 中的下列五条(1, 1)曲线：

$$D_1: x=y;\quad D_2: xy=1;$$
$$D_3: a^2y=x; D_4: xy=a^2;\ D_5: a^2xy=1.$$

则下面两个(5, 3)除子

$$B_1=D_1+2D_5+F_a+F_{-a} \text{ 和 } B_2=D_3+2D_4+F_1+F_{-1}$$

没有公共分支，都通过点

$$(0, 0), (\infty, \infty), (1, 1), (-1, -1),$$
$$(a, 1/a), (-a, -1/a),$$
$$(0, \infty), (\infty, 0), (1, 1/a^2), (-1, -1/a^2),$$
$$(a, a), (-a, -a),$$

并且在点

$$(0, \infty), (\infty, 0), (1, 1/a^2), (-1, -1/a^2),$$
$$(a, a), (-a, -a)$$

上的重数都是二。由 Bertini 定理，B_1 和 B_2 生成的线束中的一个一般除子 B 是不可约的，它通过上述的 12 个点，且除了在

$$(0, \infty), (\infty, 0), (1, 1/a^2), (-1, -1/a^2),$$
$$(a, a), (-a, -a)$$

上有普通二重点外没有别的奇点。现在设

$$R=B+D_1+D_2+D_3+F_0+F_\infty+F_1+F_{-1}+F_a+F_{-a},$$

则 R 在上述 12 个点上有四重奇点。存在 δ 使得(P, R, δ)关于 P 的第一个投影成为一组亏格二数据，它对应的亏格二纤维化 $f:S$

$\longrightarrow C$ 满足我们的要求，并且是型为 $\{3\times(1,1),(5,3)\}$ 的。

附记

例 4.4.7 是历史上第一个满足 $p_g=q=0$, $K^2=2$, 挠群为 9 元群的曲面例子。对于一般的这样的曲面，Beauville 有一个完整的刻划，参见[Ca]。

第 5 章

超椭圆纤维化

§5.1 超椭圆覆盖与奇异纤维分类

设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格为 $g\geqslant 2$ 的超椭圆纤维化。与亏格二的情形一样，f 的相对典范映射是一般二次的. 因此这个映射决定了 S 上的一个对合 σ，它限制在 f 的一条一般纤维 F 上就是 F 的超椭圆对合。σ 就称为关于 f 的超椭圆对合。

我们可以仿照亏格二的情形利用超椭圆对合对 f 的奇异纤维进行分类，唯一不同的是在 $g>2$ 时 f 的相对典范映射的象不在 C 上相对极小，所以 S 在 σ 下的商没有典范的相对极小模型。

设 $\rho:\widetilde{S}\longrightarrow S$ 为对 σ 的所有孤立不动点的爆发的复合，$\tilde{\sigma}$ 为 $\widetilde{S}$ 上的诱导对合. 则与亏格二的情形一样，商空间 $\widetilde{P}=\widetilde{S}/\tilde{\sigma}$ 为一光滑曲面，且 f 诱导 $\widetilde{P}$ 到 C 的一个(不一定相对极小的)直纹

$$\tilde{\varphi}:\widetilde{P}\longrightarrow C.$$

$\widetilde{S}$ 到 $\widetilde{P}$ 的投影是一个二次覆盖 $\tilde{\theta}:\widetilde{S}\longrightarrow\widetilde{P}$，它由一组光滑二次覆盖数据$(\widetilde{R},\tilde{\delta})$所决定.

我们可以用下面的引理确定 $\widetilde{P}$ 的一个相对极小模型，它一般不是唯一确定的.

引理 5.1.1 $\widetilde{P}$ 可以收缩成 C 上的一个相对极小模型 P，带有直纹 $\varphi:P\longrightarrow C$，满足下列条件：

1) 设(R,δ)为 $(\widetilde{R},\tilde{\delta})$ 在 P 中的象. 则投影映射 $\psi:\widetilde{P}\longrightarrow P$ 为 R 的奇点的极小偶解消；

2) 设 R_h 为 R 的非垂直部分. 则 R_h 的奇点的阶最多不超过 $g+1$. 从而因为 R 是既约的，R 的奇点最多不超过 $g+2$ 阶，且若

p 为 R 的一个 $g+2$ 阶奇点，则 R 含 φ 过 p 点的纤维。

证明 设 $\tilde{F}$ 为 $\tilde{\varphi}$ 的一条奇异纤维，则 $\tilde{F}$ 中含有一条垂直 (-1)-曲线 E。容易证明，要么 E 在 $\tilde{F}$ 中的重数 >1，要么 $\tilde{F}$ 含有另一条垂直 (-1)-曲线 E'：这是因为 $K_{\tilde{P}}\tilde{F}=-2$ 而 $K_{\tilde{P}}E=-1$，故若 E 在 $\tilde{F}$ 中是单重的，必有 $E'\subset\tilde{F}$ 使 $K_{\tilde{P}}E'<0$。但是 $E'^2<0$，故 E' 为 (-1)-曲线。

因此，我们可取 E_1 为 $\tilde{F}$ 中的一条 (-1)-曲线，满足

$$\tilde{R}_hE_1\leqslant\frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{F}=g+1,$$

这里 $\tilde{R}_h$ 为 $\tilde{R}$ 的非垂直部分。设 $\psi_1:\tilde{P}\longrightarrow P_1$ 为 E_1 的收缩映射，$R_{h,1}$ 为 $\tilde{R}$ 在 P_1 中的象，p_1 为 E_1 在 P_1 中的象点。则 $R_{h,1}$ 在 P_1 的阶等于 $\tilde{R}_hE_1\leqslant g+1$。以 P_1，$R_{h,1}$ 替换 $\tilde{P}$，$\tilde{R}_h$，归纳之，可以找到 $\psi:\tilde{P}\longrightarrow P$ 使得 P 在 C 上相对极小，且 $\tilde{R}_h$ 在 P 中的象 R_h 的奇点最多不超过 $g+1$ 阶。

设 (R,δ) 为 $(\tilde{R},\tilde{\delta})$ 在 P 中的象，并设 $\hat{\psi}:\hat{P}\longrightarrow P$ 为 R 的奇点的极小偶解消。则 (R,δ) 在 $\hat{P}$ 中的既约偶原象 $(\hat{R},\hat{\delta})$ 对应于一个二次覆盖 $\hat{\theta}:\hat{S}\longrightarrow\hat{P}$。于是由 S 在 C 上的相对极小性立即可知 $\hat{\psi}$ 通过 ψ 分解。但由 $\hat{\psi}$ 的极小性，ψ 也通过 $\hat{\psi}$ 分解，故 $\psi=\hat{\psi}$。 ▮

引理 5.1.2 设 P 满足引理 5.1.1 的条件，F 为 P 在 C 上的一条纤维，其在 $\tilde{S}$ 中的严格原象是一条 (-1)-曲线（换言之，由引理 4.1.1，F 在 $\tilde{P}$ 中的严格原象是含于 $\tilde{R}$ 中的一条 (-2)-曲线）。若 g 为偶数，则以下情形之一成立：

1) R_h 与 F 交于两个不同的点 x、y，在每个点上 R_h 的阶均为 $g+1$；或

2) R_h 与 F 交于一点 x，在其上 R_h 有一个相切于 F 的 $(g+1\rightarrow g+1)$ 型奇点。

若 g 为奇数，则 R_h 与 F 交于一点 x，在其上 R_h 有一个相切于 F 的 $(g+2\rightarrow g+2)$ 型奇点。

证明 作为练习。

根据一个给定的满足引理 5.1.1 的收缩 $\psi:\widetilde{P}\longrightarrow P$，我们可以定义 f 的奇异性指数如下：

定义 5.1.3 将 $\psi:\widetilde{P}\longrightarrow P$ 分解为 $\psi=\hat{\psi}\circ\tilde{\psi}$，其中 $\hat{\psi}:\hat{P}\longrightarrow P$ 和 $\tilde{\psi}:\widetilde{P}\longrightarrow\hat{P}$ 分别为对 R 的不可忽略和可忽略奇点的爆发。设 F 为 f 的一条纤维，并仍用 F 表示 P 在 C 上的对应纤维。定义 F 的(关于 ψ 的)第 k 个奇异性指数 $s_k(F)$，$2\leqslant k\leqslant g+2$ 如下：

设 $\hat{R}_p$ 为 R 在 $\hat{P}$ 中的既约偶原象 $\hat{R}$ 中，孤立垂直(-2)-曲线以外的部分，则 $s_2(F)$ 定义为 $\hat{R}_p$ 到 C 的投影在点 $f(F)$ 上的分歧指数(参见注 2.4.9 与定义 4.1.4)。

当 k 为奇数时，如果 $k\neq g+1$ 或者 F 不是满足引理 5.1.2 中条件的纤维，则 $s_k(F)$ 定义为 R 在 F 上的$(k\to k)$型奇点的个数；否则，$s_k(F)$ 为该个数加 1，且将 F 上的两个 $k+1$ 阶奇点认为是属于一个$(k-k)$型奇点。

当 k 为偶数并大于 2 时，$s_k(F)$ 定义为 R 在 F 上的阶为 k 并且不属于某个$(2k+1\to 2k+1)$或 $(2k-1\to 2k-1)$ 中的奇点的个数。

注意到对于任一 k，最多只有有限多条纤维 F 使 $s_k(F)>0$，我们可以定义 $s_k(f)$，或简记为 s_k，为关于所有纤维 F 的 $s_k(F)$ 之和。下面的定理说明这些 $s_k(f)$ 的定义是合适的。

定理 5.1.4 定义 5.1.3 所述的奇异性指数 s_k $(k=2,\ \cdots,\ g+2)$ 不依赖于收缩映射 $\psi:\widetilde{P}\longrightarrow P$ 的选取。

证明 设 $\psi':\widetilde{P}\longrightarrow P'$ 为另一满足引理 5.1.1 中条件的收缩，$\widetilde{F}$ 为 $\widetilde{P}$ 中的一条纤维，F、F' 分别为 $\widetilde{F}$ 在 P 和 P' 中的象在 $\widetilde{P}$ 中的严格原象。F 和 F' 都是 $\widetilde{F}$ 的单重分支。

设 $\phi:\widetilde{P}\longrightarrow\hat{P}$ 为一收缩，使得在 $\widetilde{F}$ 的象纤维 $\hat{F}$ 中，只有 F 和 F' 的象 $F_1\neq F_1'$ 为(-1)-曲线。显然 ψ 和 ψ' 都通过 ϕ 分解：

$$\psi=\psi_1\circ\phi,\ \psi'=\psi_1'\circ\phi.$$

于是我们只要考察 ψ_1 和 ψ_1' 即可。

注意，因为 $K_{\hat{P}}\hat{F}=-2$，F_1 和 F_1' 都是(-1)-曲线，并且 $\hat{F}$ 的其余不可约分支都是(-2)-曲线。特别地，若 F_1 和 F_1' 相交，则

$\hat{F}$ 由 F_1 和 F_1' 组成；否则，$\hat{F}-F_1-F_1'$ 为介于 F_1 和 F_1' 之间的一串由(-2)-曲线组成的链，如下图所示：

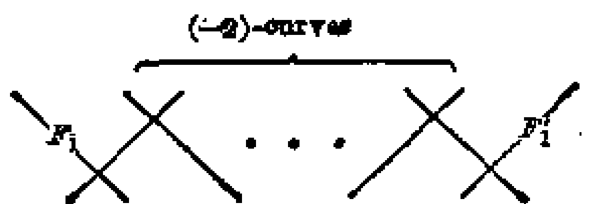


图5.1　$\hat{F}$

不仅如此，在任何一种情形，我们都必须有 $\hat{R}_h F_1 \geq g+1$（以及对称地 $\hat{R}_h F_1' \geq g+1$），这里 $\hat{R}_h$ 为 $\tilde{R}_h$ 在 ψ 下的象，因为否则，F' 在 ψ 下的象点将是 R_h 的一个阶数大于 $g+1$ 的奇点。因此

$$\hat{R}_h F_1 = \hat{R}_h F_1' = g+1,\ \hat{R}_h(\hat{F}-F_1-F_1') = 0,$$

由此很容易看出定理成立。 ▌

注意，如果 $f: S \longrightarrow C$ 为一亏格二的纤维化，则第四章中所定义的亏格二数据组(P, R, δ) 不一定满足引理 5.1.1 的条件。这是因为在亏格二的 Horikawa 分类中，R 在类型 V 的纤维上有一个 4 阶的奇点。

定义 5.1.5　定理 5.1.4 使我们可以把 (P, R, δ) 定义为曲线 C 上的一组亏格 g 数据，如果 P 是 C 上的一个几何直纹面，(R, δ)是 P 上的一组二次覆盖数据，其中 R 与 P 在 C 上的一条一般纤维相交为 $2g+2$，并且 R 在 C 上的非垂直部分 R_h 的奇点最多不超过 $g+1$ 阶。有下面的明显命题：

命题 5.1.6　设 (P, R, δ) 为曲线 C 上的一组亏格 g 数据。则存在亏格为 g 的超椭圆纤维化 $f: S \longrightarrow C$ 使 (P, R, δ) 为由 f 通过引理 5.1.1 的方式得到。

于是我们可以讨论关于一组亏格 g 数据 (P, R, δ) 的奇异性指数 $s_k(k=2, \cdots, g+2)$，它们是由 R 的奇点所唯一确定的。由此可以得到对应的亏格 g 纤维化的不变量与奇异性指数之间的关系：

定理 5.1.7 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一超椭圆的亏格 g 纤维化，s_k $(k=2,\cdots,g+2)$ 为 f 的奇异性指数。则

$$(2g+1)\chi_f=\frac{g}{4}(s_2-2s_{g+2})+\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}k(g-k)s_{2k+1}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}k(g-k+1)s_{2k},$$

$$(2g+1)K_{S/C}^2=(g-1)s_2+3s_{g+2}$$

$$+\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}(12k(g-k)-2g-1)s_{2k+1}$$

$$+\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}(6k(g-k+1)-4g-2)s_{2k},$$

$$e_f=12\chi_f-K_{S/C}^2=s_2-3s_{g+2}+\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}s_{2k+1}$$

$$+2\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}s_{2k}.$$

证明 设(P,R,δ)为 f 所对应的一组亏格 g 数据，

$$n=\delta^2/(g+1).$$

则 $\delta K_{P/C}=-n$，因此由引理 2.4.8，R 在 C 上的分歧指数为$(4g+2)n$。

注意，由于引理 5.1.2，在作了适当的变换之后，我们可以假设所有的奇异性指数都是来自 R 的相应奇点。

设$(\hat{P},\hat{R},\hat{\delta})$为对 (P,R,δ) 的不可忽略奇点的偶解消。由 s_k 的定义直接得

$$\hat{\delta}^2=\delta^2-\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}(2k^2+2k+1)s_{2k+1}-\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}k^2s_{2k},$$

$$\hat{\delta}K_{\hat{P}/C}=\delta K_{P/C}+\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}(2k+1)s_{2k+1}+\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}ks_{2k},$$

因此由二次覆盖的有关公式，若 $\tilde{f}:\tilde{S}\longleftarrow C$ 为对应于$(\hat{P},\hat{R},\hat{\delta})$的极小偶解消的二次覆盖纤维化，我们有

$$\chi_{\tilde{f}}=\frac{1}{2}(\hat{\delta}^2+\hat{\delta}K_{\hat{P}/C})$$

$$=\frac{1}{2}gn-\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}k^2s_{2k+1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}(k^2-k)s_{2k}, \tag{5.1}$$

$$K^2_{\tilde{S}/C}=2(\hat{\delta}+K_{\hat{P}/C})^2$$
$$=2(g-1)n-\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}(4k^2-4k+2)s_{2k+1}$$
$$-2\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}(k-1)^2s_{2k}. \tag{5.2}$$

此外，我们可以由下面的引理确定 $\hat{R}$ 中的孤立垂直 (-2)-曲线，从而确定 $\tilde{S}$ 中的垂直(-1)-曲线的数目。

引理 5.1.8　设 (P, R, δ) 为曲线 C 上的一组亏格 g 数据，$(\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{\delta})$和$(\hat{P}, \hat{R}, \hat{\delta})$分别为关于 R 的所有奇点和所有不可忽略奇点的爆发。设 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow C$ 为$(\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{\delta})$ 所确定的二次覆盖纤维化，并设 E 为 $\tilde{S}$ 上的一条垂直 (-1)-曲线。则 E 在 $\tilde{P}$ 中的象 $\tilde{E}$ 是含于 $\tilde{R}$ 中的一条孤立 (-2)-曲线，并且 $\tilde{E}$ 要么属于 R 的某个奇数阶的奇点的解消，要么是一条 5.1.2 型纤维的严格原象。在这两种情形 $\tilde{E}$ 都是 $\hat{R}$ 中的一条孤立的垂直(-2)-曲线的原象。

反之，对于 R 上的每个奇数阶的奇点或 5.1.2 型的纤维，$\tilde{R}$ 和 $\hat{R}$ 中分别有一条对应的垂直(-2)-曲线。而在 g 为奇数且奇点为$(g+2\to g+2)$型时，这样的垂直(-2)-曲线有两条。所以 $\tilde{S}$ 上的垂直(-1)-曲线个数等于 $\sum\limits_{k=1}^{[(g+1)/2]}s_{2k+1}+s_{g+2}$。

证明　因为 E 一定来自 $\tilde{S}$ 的相对极小模型 S 上的对合的某个孤立不动点的爆发，它在 $\tilde{P}$ 中的象 $\tilde{E}$ 是 $\tilde{R}$ 中的一条垂直(-2)-曲线(引理 4.1.1)。我们只要证明这样的一条(-2)-曲线必如引理中所述。为此假设 $\tilde{E}$ 不是 P 中纤维的严格原象，这时投影映射 $\psi:\tilde{P}\longrightarrow P$ 可以分解为

$$\tilde{P}\xrightarrow{\psi'}P_1\xrightarrow{\psi''}P,$$

使得 $\tilde{E}$ 在 P_1 中的象 E_1 为一条(-1)-曲线。则 E_1 是 $\tilde{R}$ 在 P_1 中的象 R_1 的一个分支，且 R_1 在 E_1 上恰有一个奇异点，设其阶数为 k。因为 R_1 是偶除子，k 是偶数；且由解消 ψ 的极小性，$k>2$。由此立即可以看出 $\tilde{E}$ 属于一个$(k-1\to k-1)$型的奇点。

反之是显然的。∎

由奇点解消的公式及相对相伴公式得知，$\hat{R}$在C上的分歧指数为

$$(4g+2)n-\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}(8k^2+4k+2)s_{2k+1}$$
$$-\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}(4k^2-2k)s_{2k}.$$

另一方面，由 s_2 的定义和引理 5.1.8，该分歧指数又等于

$$s_2-2s_{g+2}-2\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}s_{2k+1}.$$

于是我们可以通过这两个等式把 n 表为奇异性指数的函数：

$$(2g+1)n=\frac{1}{2}(s_2-2s_{g+2})$$
$$+\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}(4k^2+2k)s_{2k+1}$$
$$+\sum_{k=2}^{[(g+1)/2]}(2k^2-k)s_{2k}. \qquad (5.3)$$

现在从公式(5.1)、(5.2)和(5.3)中消去n，可得到 $\chi_{\tilde{f}}$(即 χ_f)以及 $K^2_{\tilde{S}/C}$ 关于 s_k 的表达式；然后由引理 5.18 知

$$K^2_{S/C}=K^2_{\tilde{S}/C}+\sum_{k=1}^{[(g+1)/2]}s_{2k+1}+s_{g+2}. \qquad (5.4)$$

最后由相对 Noether 公式(2.4)推出 e_f 的表达式。 ∎

推论 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 g 的超椭圆纤维化，则关于 f 的斜率有

$$\frac{4g-4}{g}\leqslant\lambda_f\leqslant\begin{cases}12-\dfrac{8g+4}{g^2}, & g\text{ 为偶数；}\\[2mm] 12-\dfrac{8g+4}{g^2-1}, & g\text{ 为奇数。}\end{cases}$$

且左边的等号成立当且仅当阶数 k 大于 2 的奇异性指数 s_k 均等于零，换言之，若(P, R, δ)是对应于 f 的一组亏格 g 数据(这时是唯一确定的)，则R没有不可忽略奇点；右边的等号成立当且仅当除了 s_{g+1}(当 g 为偶数时)或 s_g(当 g 为奇数时)外，所有的奇异性指数 s_k 均等于零。

证明 比较定理中 χ_f 和 $K^2_{S/C}$ 的表达式中，关于各 s_k 的系数立即可得。（注意到如果一条纤维 F 满足 $s_{g+2}(F)\neq 0$，则 $s_{g+2}(F)=1$，$s_2(F)=g+1$。） ∎

由超椭圆二次覆盖还可以导出以下命题：

命题 5.1.9 超椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的多重纤维都是二重的。特别地，当 f 含有多重纤维时，它的亏格 g 为奇数。

证明 设 $\tilde{S}$ 如本节开始所述，$\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow C$ 为诱导纤维化。F 为 f 的一条多重纤维当且仅当 $\tilde{f}$ 的对应纤维 $\tilde{F}$ 也是多重的，并且重数相同。因此我们只要考虑 $\tilde{f}$。但这时 $\tilde{S}$ 是 $\tilde{P}$ 的一个二次覆盖，而 $\tilde{F}$ 在 $\tilde{P}$ 中的象 F' 含有一个既约分支 Γ'。设 Γ 为 Γ' 在 $\tilde{F}$ 中的一个原象分支。若 Γ' 不在 $\tilde{R}$ 中，则 Γ 为 $\tilde{F}$ 的既约分支，因而 $\tilde{F}$ 是单重的；否则，Γ 在 $\tilde{F}$ 中的重数为 2，因而 $\tilde{F}$ 至多为二重纤维。 ∎

§5.2 基 本 群

作为 §5.1 中的理论的一个应用，我们来看看如何通过超椭圆二次覆盖来计算 S 的基本群的垂直部分 $\mathscr{V}_f$。这一节中的 π_1 都是拓扑基本群。

设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 g 的超椭圆纤维化，并采用 §5.1 的开始和定义 5.1.3 中的记号。设 $\tilde{P}'=\tilde{P}-\tilde{R}$，$\tilde{S}'=\theta^{-1}(\tilde{P}')$。参照 §2.7 的方法，我们可以定义 $\pi_1(\tilde{P}')$ 和 $\pi_1(\tilde{S}')$ 在 C 上的垂直部分 $\mathscr{W}=\mathscr{W}_f$ 和 $\mathscr{Z}=\mathscr{Z}_f$。因为诱导二次覆盖 $\tilde{\theta}':\tilde{S}'\longrightarrow\tilde{P}'$ 是平展的，$\mathscr{Z}$ 是 $\mathscr{W}$ 中一个指标为 2 的子群。而且，$\tilde{S}'$ 到 $\tilde{S}$ 中的嵌入诱导 $\pi_1(\tilde{S}')$ 到 $\pi_1(\tilde{S})=\pi_1(S)$ 上的一个满射同态，它把 $\mathscr{Z}$ 映到 $\mathscr{V}_f$ 之上。因此 $\mathscr{V}_f$ 是 $\mathscr{W}$ 的一个商群的 2 阶子群。

定义 5.2.1 设 G 为一有限生成的群。G 的同构于 $\mathbf{Z}_2^n$ 的极大交换商群称为 G 的挠 2 商，而 n 称为挠 2 商的秩。

$\mathscr{V}_f$ 的挠 2 商可以由超椭圆覆盖的分枝轨迹 $\tilde{R}$ 的相交特性直接决定。为此取 f 的一条一般纤维 F，设 Φ 为 $\tilde{P}$ 中的对应纤维。

则 $\widetilde{R}|_{\Phi}$ 为 $2g+2$ 个点 $x_1, \cdots, x_{2g+2}$。设 $\Phi'=\Phi-x_1-\cdots-x_{2g+2}$，于是 $\mathscr{W}$ 是 $\pi_1(\Phi')$ 的一个商群。对每个 x_i，设 γ_i 为 Φ' 中绕 x_i 的一个小环路。则 $\pi_1(\Phi')$ 由这些 γ_i 的类 $[\gamma_i]$ 生成。设 $\mathscr{B}$ 为

$$\{[2\gamma_1], \cdots [2\gamma_{2g+2}]\}$$

在 $\mathscr{W}$ 中的象生成的正规子群。则有下述明显的引理。

引理 5.2.2 $\mathscr{V}_f=\mathscr{Z}/(\mathscr{Z}\cap\mathscr{B})$。

由此立即可以得到以下引理：

引理 5.2.3 设 $\mathscr{A}=\mathscr{W}/[\mathscr{W}, \mathscr{W}]$ 为 $\mathscr{W}$ 的阿贝尔化。则 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{V}_f$ 上的限制等于 $\mathscr{V}_f$ 的挠 2 商，特别地，若 $\mathscr{W}$ 为交换群，则 $\mathscr{V}_f$ 由挠 2 商组成。

证明 由于我们可以取 γ_i 使得

$$[\gamma_{2g+2}]=[\gamma_1]\cdots[\gamma_{2g+1}],$$

$$G=\pi_1(\Phi')/[\pi_1(\Phi'), \pi_1(\Phi')]$$

是 $2g+1$ 个元生成的自由阿贝尔群。由前面的注可以看出，$\mathscr{Z}$ 在 $\pi_1(\Phi')$ 中的原象在 G 中的象的挠 2 商 H 是

$$G/\langle[2\gamma_1], \cdots, [2\gamma_{2g+1}]\rangle\cong\mathbf{Z}_2^{2g+1}$$

中的一个指标为 2 的子群，因此 $H\cong\mathbf{Z}_2^{2g}$。但 H 是 $\pi_1(F)$ 的一个商群而 $\pi_1(F)$ 的挠 2 商的秩为 $2g$，所以 H 即 $\pi_1(F)$ 的挠 2 商。现在由引理 5.2.2，$\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{V}_f$ 上的限制是 H 的一个商群。 ∎

注 5.2.4 容易看出，在引理 5.2.3 的证明中，如果把 G 中的元素写成 $[\gamma_1], \cdots, [\gamma_{2g+2}]$ 的积，则 H 为所有可表为偶数个 $[\gamma_i]$ 的积的元素全体。

下面就是 $\mathscr{V}_f$ 的挠 2 商与分枝轨迹的相交特性之间的关系。

定理 5.2.5 设 $\hat{R}$ 由 l 个连通分支组成：

$\hat{R}=R_1+\cdots+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_l,\ R_iR_j=0\quad(\forall i\neq j)$，

其中 $R_1, \cdots, R_k$ 含有非垂直部分，而 $R_{k+1}, \cdots, R_l$ 由垂直部分组成。设

$$R'=R_1+\cdots+R_k,\qquad R''=R_{k+1}+\cdots+R_l,$$

T 为 $\mathscr{V}_f$ 的挠 2 商。

设 G 为由 k 个生成元 $\{r_1, \cdots r_k\}$ 生成的自由挠 2 阿贝尔群中，

所有可表为偶数个生成元的积的元素所成的子群。则 T 为 G 的由下列关系定义的商群：

设

$$D=D_1+\cdots+D_{2s+1}(D_1D_2=D_2D_3=\cdots=D_{2s}D_{2s+1}=1)$$

为 $\hat{P}$ 中 $2s+1$ 条不可约垂直曲线组成的链，其中 $s\geqslant 0$，D_2，D_4，$\cdots$，D_{2s} 含于 R'' 中，且 D 不与 R'' 的其余不可约分支相交。则

$$\sum_{i=1}^{k}(R_iD)r_i=0. \qquad (*)$$

特别地，取 D 为一条一般纤维，可知若所有的 R_i 到 C 的投影都是偶数次的，则 T 的秩不大于 $k-1$；否则，该秩不大于 $k-2$。

证明 首先注意，由 $\hat{R}$ 的偶性不难证明 $R'D$ 为偶数，因此形如(*)的关系都在 G 中。

设 x 为 $\tilde{R}$ 上的一个点，γ 为过 x 且与 $\tilde{R}$ 横截相交的一条局部曲线上绕 x 一周的一条小环路。则关于 $\tilde{P}'$ 中连接基点和 γ 的一条道路，γ 代表 $\pi_1(\tilde{P}')$ 的一个元素，γ 称为关于 x 的一个横截环路，若 γ 完全落在 $\tilde{P}'$ 的一条纤维中，则称为垂直横截环路，这时它代表 $\mathscr{A}$ 的一个元素。注意，$\tilde{R}$ 的每个不可约分支上都有垂直横截环路，因此 $\mathscr{A}$ 由所有的横截环路生成。

下面先来证明两个简单的引理。

引理 5.2.6 设 Γ 为 $\tilde{R}$ 的一个不可约分支，则关于 Γ 上的所有点的横截环路在 $\pi_1(\tilde{P}')$ 中均共轭。特别地，若 $\tilde{R}_1$，$\cdots$，$\tilde{R}_n$ 为 $\tilde{R}$ 的不可约分支集合，$\tilde{r}_i$ 为关于 $\tilde{R}_i$ 上一点的横截环路在 $\mathscr{A}$ 中代表的元素，则 $\mathscr{A}$ 由 $\tilde{r}_1$，$\cdots\tilde{r}_n$ 生成。

证明 设 p_1、p_2 为 Γ 上的两点，β_i 为关于 p_i 的一个横截环路，落在局部曲线 C_i 上。存在 Γ 的一个管形邻域 V 以及 V 到 Γ 的一个形变收缩 $\varphi: V\longrightarrow\Gamma$，使得 C_1 和 C_2 都是 φ 的纤维。不妨假定 β_1 和 β_2 都在 V 中。设 γ 为 Γ 中连接 p_1 和 p_2 的一条光滑道路。则 $\varphi^{-1}(\gamma)$ 微分同胚于 $[0,1]\times\Delta$，这里 Δ 为单位圆盘。若设 β_1 和 β_2 在这个微分同胚下到 Δ 的投影为同一条环路 β，则 $[0,1]\times\beta$ 给出 β_1 到 $\gamma'\beta_2\gamma'^{-1}$ 的一个同伦，这里 γ' 为 β 的端点在 $\varphi^{-1}(\gamma)$

中的原象。

设 $\widetilde{R}_1, \cdots, \widetilde{R}_m$ 为 $\widetilde{R}$ 的非垂直分支集合，

$$\widetilde{R}_h=\sum_{i=1}^{m}\widetilde{R}_i.$$

则由上面的引理可知，$\mathscr{A}$ 由 $\tilde{r}_1, \cdots, \tilde{r}_m$ 生成，而 T 由 $\mathscr{A}$ 中所有可表为偶数个 $\tilde{r}_i$ 之积的元素的象生成。

引理 5.2.7 设

$$D=D_1+\cdots+D_{2s+1}(D_1D_2=D_2D_3=\cdots=D_{2s}D_{2s+1}=1)$$

为 $\widetilde{P}$ 中 $2s+1$ 条不可约垂直曲线组成的链，其中 $s\geqslant 0$，D_2，D_4，$\cdots$，D_{2s} 含于 $\widetilde{R}$ 中。则

$$\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{R}_iD)\tilde{r}_i$$

在 T 中的象为单位元，其中求和号为对 $\widetilde{R}$ 的所有不含于 D 中的分支所作。

证明 我们对 s 归纳。当 $s=0$ 时，设 $x_1, \cdots, x_t$ 为 $\widetilde{R}$ 与 D 的交点集，$[\gamma_i]$ $(i=1, \cdots, t)$ 为 D 中绕 x_i 一周的一条小环路在 $\mathscr{A}$ 中的象。则

$$\sum_{i=1}^{t}[\gamma_i]=0.$$

另一方面，设 $\widetilde{R}_i$ 与 D 在 x_j 相交 d 次。若 $d=1$，则该相交为横截；否则，为 d 次相切。于是 $[\gamma_j]=d\tilde{r}_i$，因此引理在这时成立。

在一般情形，设 δ 为关于 D_{2s} 上任一点的横截环路在 $\mathscr{A}$ 中的象。对 $D'=D_1+\cdots+D_{2s-1}$ 运用归纳法假设，$\delta+\sum\limits_{i=1}^{m}(\widetilde{R}_iD')\tilde{r}_i$ 在 T 中的象等于 0；对 D_{2s+1} 运用 $s=0$ 的情形，

$$\delta+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{R}_iD_{2s+1})\tilde{r}_i=0.$$

两式相加即得引理。 ▌

现在我们需要把这些有关 $\widetilde{R}$ 的结论化到 $\hat{R}$ 的情形。为此设 $\widetilde{R}_i$，$\widetilde{R}_j$ 为 $\widetilde{R}$ 中的两个不可约分支，它们在 $\hat{P}$ 中的象相交于一个可忽略奇点 p。我们来证明在 T 中 $\tilde{r}_i+\tilde{r}_j=0$，因此只要对 $\hat{R}$ 的

每个非垂直连通分支取关于其中一个不可约分支的一个横截环路，即可生成 $\mathscr{A}$。由此即得定理中关于T的生成元集合的论断，且由引理 5.2.7 知T中元素满足条件(*)。

设E为p在$\tilde{P}$中的完全原象，并设E_i、E_j分别为E中与$\tilde{R}_i$、$\tilde{R}_j$相交的不可约分支。显然，E_i和E_j都是(-1)-曲线。注意到$\hat{R}$在p点的阶最多为3，故$E_i\tilde{R}$为不大于3的偶数。如果$E_i=E_j$，则E_i不与$\tilde{R}$的其它分支相交，且E_i与$\tilde{R}_i$、$\tilde{R}_j$横截相交。归纳之可知p为$\hat{R}$的二重点，并且E不与$\tilde{R}$的其他分支相交。于是对E_i运用引理 5.2.7 即得$\tilde{r}_i+\tilde{r}_j=0$。

当$E_i\neq E_j$时，同理可知它们分别与$\tilde{R}$的另一分支相交，且该分支一定落在E中。现在不难看出，E中连接E_i和E_j的曲线链E'满足引理 5.2.7 的条件，且E'不与$\tilde{R}$中别的分支相交。

剩下只要证明形如(*)的方程生成T的所有关系。由于定理 2.7.6，只要证明由$\hat{P}$在C上的任一纤维Φ所给出的T的关系可由(*)形关系生成。对于Φ中每个不含于$\tilde{R}$中的不可约分支D，由引理 5.2.7，D给出T的一个关系(取$s=0$)。因为Φ是由光滑有理曲线组成的树形除子，这些关系生成Φ所给出的关系。然后过渡到$\hat{P}$即得定理。 ▮

推论 1[X5，引理 4] 设f为亏格2的纤维化，对应的$\hat{R}$有k个非垂直连通分支。当所有的连通分支到C的投影都是偶数次时，T的秩等于$k-1$；否则，该秩等于$k-2$。

证明 这时满足定理中条件(*)的链除了一般纤维外，都是由R的3阶不可忽略奇点给出的。由于$2g+2=6$，这样的链都诱导T的平凡关系。 ▮

推论 2 设$f:S\longrightarrow C$为一亏格2的纤维化，τ为$\mathscr{V}_f$的挠2商$T\cong \mathbf{Z}_2^\tau$的秩。则$0\leqslant\tau\leqslant4$，且当$\tau=4$时$\lambda_f=7$，$\tau<4$时$\lambda_f\geqslant\tau+2$。

证明 这是推论1和引理 4.2.7 的直接结果。 ▮

定理 5.2.8 设$f:S\longrightarrow C$为一亏格g的超椭圆纤维化，满足

$$\lambda_f < 4 - \frac{1}{g-1}.$$

则 $\mathscr{F}_f$ 的挠2商 $T=0$。

证明 采用定理5.1.7的证明中的记号，即 $R^2=4n(g+1)$。如果 T 非平凡，则由定理5.2.5知，$\hat{R}$ 可以拆成两个互不连通的子除子 $\hat{R}_1$，$\hat{R}_2$ 之和，它们在 C 上的次数 d_1，$d_2=2g+2-d_1$ 都是大于零的偶数。不妨设 $d_1\leqslant g+1$，并假定 $\hat{R}$ 的孤立垂直分支都在 $\hat{R}_2$ 中，因此由注2.4.9，$\hat{R}_1$ 在 C 上的分歧指数非负。设 R_1，R_2 分别为 $\hat{R}_1$，$\hat{R}_2$ 在 P 中的象，由既约性可知 $R_1^2\geqslant 0$，$R_2^2\geqslant 0$。

设 r 为 R_1 到 C 的投影的分歧指数。由 Riemann-Roch 定理和 Hurwitz 公式算得

$$r=\frac{d_1-1}{d_1}R_1^2,$$

且
$$R_1R_2=d_1n+\frac{1}{d_1}(g+1-d_1)R_1^2,$$

或
$$n=\frac{1}{d_1}\left(R_1R_2+r-\frac{rg}{d_1-1}\right). \tag{5.5}$$

设 p 为 R 的一个不可忽略奇点，ι_p 为 R_1 和 R_2 在 p 的相交数，r_p 为 r 在 p 上的部分。则

$$R_1R_2=\Sigma_p\iota_p,\quad r\geqslant\Sigma_p r_p,$$

这里的求和对所有不可忽略奇点 p 进行。因此我们可以考虑不同的不可忽略奇点对(5.5)式右边的贡献。设 d 为 R_1 在 p 的阶。

若 p 为一 $(2k+1\to 2k+1)$ 型奇点，则

$$\iota_p=2d(2k+1-d),\quad r_p=2d(d-1).$$

于是 p 对(5.5)式右边的贡献为

$$\frac{d}{d_1}\left(4k-2\frac{d-1}{d_1-1}g\right),$$

该值当 $d=1$，$d_1=2$ 时取极大值 $2k$。

若 p 为 $2k$ 阶偶奇点，则

$$\iota_p=d(2k-d),\quad r_p=d(d-1).$$

于是 p 对(5.5)右边的贡献为

$$\frac{d}{d_1}\left(2k-1-\frac{d-1}{d_1-1}g\right).$$

当 $d\neq 1$ 时，该值在 $d=2$, $d_1=4$ 时取极大值

$$k-\frac{1}{2}-\frac{g}{6}\leqslant\frac{1}{3}(2k-1).$$

设 $d=1$，由定理 5.2.5 知 $\hat{R}$ 中有一孤立垂直分支 $\hat{\Gamma}$ 过 p 的原象，且因 p 不属于 $(2k-1\to 2k-1)$ 型奇点，由引理 5.1.8，$\hat{\Gamma}^2\leqslant -4$，即 $\hat{\Gamma}$ 在 P 中的象 Γ 上至少有 4 个互不无限接近的不可忽略奇点。对其中任意两个的原象和 $\hat{\Gamma}$ 运用定理 5.2.5 推得 R_1 通过每个这样的点，特别地 $d_1\geqslant 4$，因此上述值不大于 $\frac{1}{4}(2k-1)$。

把这两种情形代入(5.5)，得

$$n\leqslant\sum_{i=3}^{g+2}c_i s_i,$$

其中当 i 为奇数时 $c_i=i-1$；i 为偶数时

$$c_i=\frac{1}{3}(i-1).$$

将上式代入(5.1)和(5.2)并利用(5.4)，经过简单的计算，得到

$$\lambda_f\geqslant 4-\frac{1}{g-1},$$

且等式仅在 $d_1=2$ 而且除了 s_2 和 s_3 外所有的奇异性指数均为零时成立。 ▮

注 5.2.9　在[X4]中有

$$\lambda_f=4-\frac{1}{g-1}$$

且 $T\cong\mathbf{Z}_2$ 的例子，对所有的 $g\geqslant 2$。另外，用同样的方法也可以得到 T 的秩为 2, 3, … 时 λ_f 的下界，但计算将变得更加复杂。

注 5.2.10　作者还证明了当超椭圆纤维化的 $\lambda_f<4$（当 $g=2$ 时，$\lambda_f<3.4$）时，$\mathscr{V}_f$ 等于其挠 2 商[X9]。

§5.3 例

由于§5.1中所述的超椭圆纤维化与直纹曲面中偶除子之间的对应关系，构造这样的纤维化显然可以化为在直纹面中寻找具有给定奇点个数的既约偶除子问题。这样，从定理5.1.7不难看出，构造斜率接近于下限$\frac{4g-4}{g}$的例子是一件平凡的工作，因为在这样的亏格g数据组(P, R, δ)中，R只含有较少的不可忽略奇点，所以我们可以利用Bertini定理来证明这样的R的存在性。也正是由于这个原因，斜率越高的纤维化的例子越令人感兴趣。同时，从一个已知的纤维化出发，我们还可以通过第二章中所述的纤维扭曲的方法构造出一批新的纤维化来，而这些纤维化的斜率一般来说比原有的那个要低些。所以在下面的例子中，我们只考虑几个斜率大于8的情形。

例5.3.1[X3]　我们可以利用$\mathbf{P}^1$的一个非循环有限自同构群在$\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$中的图来构造斜率大子8的超椭圆纤维化。

设G为$\mathbf{P}^1$的一个这样的自同构群。因此G是一个多面体群，它一定是下列群之一：二面体群D_{2l}，四面体群T_{12}，八面体群O_{24}，二十面体群I_{60}(这里的下标为该群的阶)。

考虑G在$P'=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$中的图$\Gamma$，这是由对所有$\gamma\in G$和$p\in\mathbf{P}^1$，形如$(p, \gamma(p))$的点组成的除子。设$n$为$G$的阶，则$\Gamma$由$n$条$(1,1)$型的曲线组成，因此它在$\mathrm{NS}(P')$中的次数是$(n, n)$。对于$G$的每个不动点$p\in\mathbf{P}^1$和任一$\gamma\in G$，点$(p, \gamma(p))$是$\Gamma$上的一个简单$k$重奇点，这里$k$是$p$的安定子群$\mathrm{Stab}(p)$的阶。而此关于上述各多面体群，$\Gamma$的各阶奇点的个数分别为：

D_{2l}：$2l^2$个2重点，4个l重点；

T_{12}：36个2重点，32个3重点；

O_{24}：144个2重点，64个3重点，36个4重点；

I_{60}：900个2重点，400个3重点，144个5重点。

设 p_1 和 p_2 为 P' 到两个分量的投影，并设D为$\mathbf{P}^1$中所有安定子群的阶为偶数的不动点在 p_2 下的原象。则 $R'=\Gamma+D$ 是 P' 上的一个偶除子，它的奇异点都是奇数阶的。注意，如果 p_1 的一条纤维F过 R' 的一个k 阶奇异点，则F和 R' 的每个交点都是 R' 上的 k 阶奇异点。

现在注意，G 在 $\mathbf{P}^1$ 上的作用共有偶数个不动点，因此可以构造一个二次覆盖 $\pi:C\to\mathbf{P}^1$，它的分枝轨迹恰好是 G 的不动点全体。设 $\varphi:P\longrightarrow C$ 为 p_1 在 π 下的拉回，$\Pi:P\longrightarrow P'$ 为投影，R 为 R'在 Π 下的原象：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Pi} & P' \\ \varphi\downarrow & & \downarrow p_1 \\ C & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

则 $P\cong C\times\mathbf{P}^1$ 为 C 上的一个几何直纹面，R 为P 上的一个既约偶除子，它的奇点都是$(2k+1\to 2k+1)$型的。我们可以找到一个$\delta\in\mathrm{Pic}(P)$使得(P, R, δ) 成为一组亏格 g 数据，这里 $2g+2$ 等于 G 的阶加上D中曲线的数目。这样对应的亏格 g 纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 就只有奇数阶的奇异性指数不为零。利用定理 5.1.7，可得到下表：

G	$g(C)$	g	s_3	s_5	s_{2l+1}	χ_f	$K^2_{S/C}$	λ_f
D_{4l}	$2l$	$4l$	$8l^2$	—	4	$4l^2$	$10\chi_f-4$	$\geqslant 9$
D_{4l+2}	$2l+1$	$4l+1$	$2(2l+1)^2$	—	4	$4l^2+4l$	$10\chi_f-6$	$\geqslant 9.25$
T_{12}	6	8	68	0	—	28	268	9.57
O_{24}	12	20	208	36	—	128	1292	10.09
I_{60}	30	44	1300	144	—	764	7724	10.11

例 5.3.2 在上例的构造中稍加变化，作者还得到了底亏格为零、斜率>8 且 S 为单连通的纤维化（见[Ch1]）。为此注意，在上例中，$\Pi:P\longrightarrow P'$ 是一个二次覆盖，它以 $p_1:P'\longrightarrow\mathbf{P}^1$ 的若干条纤维组成的除子 B 为分枝轨迹。如果设 B_1 为 $p_2:P'\longrightarrow\mathbf{P}^1$ 的两条一般纤维，并设 $\Pi_1:P_1\longrightarrow P'$ 为以 $B+B_1$ 为分枝轨迹的二

次覆盖及其非奇异化，则 p^1 在 P_1 上诱导的纤维化 φ_1 的底曲线还是 $\mathbf{P}^1$。再设 R_1 为 R' 在 P_1 中的原象加上 φ_1 的两条一般纤维，S 为 P_1 的以 R_1 为分枝轨迹的二次覆盖的非奇异化，$f:S\longrightarrow\mathbf{P}^1$ 为 φ_1 诱导的纤维化，则 f 不含多重纤维，且它有两条单连通纤维。于是由定理 2.7.9，S 是单连通的。取 $G=I_{60}$，具体的计算给出下面的不变量：

$$s_2=5700,\ s_3=1300,\ s_5=144,\ s_{90}=124,$$

$$g=89,\ \chi_f=2278,\ K^2_{S/C}=19228,\ \lambda_f=8.44.$$

利用上面的例子加以变化再作适当的基变换和超椭圆纤维扭曲，陈志杰[Ch1]证明了以下定理：

定理 5.3.3 对于任意满足

$$2x-6\leqslant y\leqslant 8.757x-365.7x^{2/3},\ x>\mathrm{Const}$$

的整数对 (x,y)，存在极小单连通曲面 S，使得 $\chi(\mathcal{O}_S)=x$，$K^2_S=y$。

例 5.3.4 (Persson, [P4]) 设 $P'=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$，$\Lambda$ 为 P' 中 (2,2) 次曲线组成的一个网（二维线性系）。在 Λ 与 $\mathbf{P}^2$ 的自然同构下，设 C 为 Λ 中的一条一般三次曲线，$p_1,\cdots,p_9$ 为 C 的九个拐点。则 Λ 中含这九个点中任意两个的直线包含第三个点（例如见[OO]，定理 17.12)。这样的直线一共有 12 条。由一般性假设，p_i 所对应的 P' 中的 (2.2) 除子 D_i 都是光滑不可约的，且任意两个这样的除子正规交于 8 个不同的点。

因为由 D_i 和 D_j 生成的线束对应于 Λ 中过 p_i 和 p_j 的直线，存在 D_k 过 D_i 和 D_j 的每个交点。于是 P' 中的 (18,18) 次除子 $R'=D_1+\cdots+D_9$ 的奇异点都是一般三重点。计算相交数可知这样的三重点一共有 $12\times8=96$ 个。设 $\Sigma\subset\mathbf{P}^1$ 为这 96 个点在 p_1 下的象，$\pi:C\longrightarrow\mathbf{P}^1$ 为以 Σ 为分枝轨迹的二次覆盖，$\Pi:P\longrightarrow P'$ 为 π 关于 p_1 的拉回，R 为 R' 在 P 中的原象。则 $g(C)=47$，R 为 $P\cong C\times\mathbf{P}^1$ 中的一个 (36, 18) 次除子，含有 96 个无限接近三重点。不难看出，存在 δ 使得 (P,R,δ) 成为 C 上的一组亏格 8 数据，它所对应的超椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 满足

$$s_2 = 9\times 8 = 72,\ s_3 = 96,\ s_i = 0(i>3),$$

因此，由定理 5.1.7，

$$\chi_f = 48,\ K^2_{S/C} = 408,\ \lambda_f = 8.5,$$

或 $$\chi(\mathcal{O}_S) = 370,\ K^2_S = 2984,\ K^2_S/\chi(\mathcal{O}_S) = 8.065.$$

附记

定理 5.2.5 实际上是 Beauville 的一个引理[B3, Lemme 2]的相对情形，在那里采用的是纯代数的表述及证明。

满足 $K^2>8\chi$ 的单连通曲面的第一个例子是由 Moishezon 和 Teicher 给出的 [MT]。例 5.3.1 是第一个超椭圆的这种曲面的例子，它们具有比[MT]中更高的斜率。

第 6 章

非超椭圆纤维化及其他

§6.1 斜率公式

我们在研究非超椭圆纤维化时遇到的第一个问题是：超椭圆情形下奇异纤维和不变量之间的简单关系(定理5.1.7)这时不复存在。§6.4中的小平纤维化的存在即可说明纤维化的不变量与奇异纤维的无关性，但下面的这个简单的例子更好地反映了这个现象。

例6.1.1 设D为一亏格2的曲线，$C\cong\mathbf{P}^1$，$P=C\times D$，$\varphi:P\longrightarrow C$为投影，$n\geqslant 1$为一整数，$F$为$\varphi$的一条纤维．在线性系$|2K_{P/C}+2nF|$中取一充分一般的除子$R$，则$R$为不可约既约光滑偶除子，且$\varphi$诱导的$R$到$C$的投影恰有$20n$个简单分歧点，分布在$\varphi$的不同纤维上。

设S为P的一个以R为分枝轨迹的二次覆盖，$f:S\longrightarrow C$为诱导纤维化。f的一般纤维为光滑亏格5的曲线，恰有$20n$条奇异纤维，它们都是带有一个非分离二重点的稳定曲线。另外由二次覆盖的公式算得$K^2_{S/C}=16n$，$\chi_f=3n$，这显然与定理5.1.7的公式不符，因为按照§5.1的奇异纤维分类，至少直观地来说，f的奇异纤维都是属于$s_2=1$而其余奇异性指数均为零的。

由于这个原因，我们只能寻找新的想法来研究非超椭圆纤维化的不变量之间的关系。事实上，局部自由层$f_*\omega_{S/C}$提供了一个途径，所不足的是这样所作的估计是不精确的，因而其结论也不像在超椭圆情形那样完美。

作为一个启发性的例子，我们先看一个最简单的情形．假设

$f_*\omega_{S/C}=\mathscr{L}^{\oplus g}$，这里$\mathscr{L}$为$C$上的一个正次数可逆层。于是$f_*(\omega_{S/C}\otimes f^*\mathscr{L}^{\vee})$是平凡的，特别它在每个点上的茎都由整体截面生成。设D为对应于$f^*\mathscr{L}$的一个除子，则这个生成性意味着$|K_{S/C}-D|$的面定部分Z由垂直曲线组成。设$|K_{S/C}-D|=|M|+Z$，其中$|M|$为变动部分。则$K_{S/C}^2=M^2+MZ+K_{S/C}Z+MD+K_{S/C}D\geqslant(4g-4)\deg\mathscr{L}$。另一方面$\chi_f=\deg f_*\omega_{S/C}=g\cdot\deg\mathscr{L}$，故$\lambda\geqslant\dfrac{4g-4}{g}$。

在一般的情形，$f_*\omega_{S/C}$是很复杂的，所以要利用它的Harder滤过，并对滤过的每一级建立$|K_{S/C}|$的一个相应的子线性系进行综合估计。下面我们就遵照［X4］对此作一详细的介绍。首先建立几个技术性的引理和概念。

定义6.1.2　设$f:S\longrightarrow C$为任一纤维化，D为S上的一个除子，$\mathscr{E}=f_*\mathscr{O}_S(D)$。由引理2.5.1，$\mathscr{E}$是$C$上的一个局部自由层。设$\mathscr{F}$为$\mathscr{E}$的一个饱和子层。则关于$\mathscr{F}$的固定部分$Z(\mathscr{F})$为$S$上的一个有效除子，它的定义如下：

对C的任一仿射Zariski开集U，$\mathscr{E}_U$和$\mathscr{F}_U$都是由U上的整体截面生成的，因此$H^0(\mathscr{F}_U)$对应于$f^{-1}(U)$上的线性系$|D_U|$中的一个子系Λ。设Z_U为Λ的固定部分。则Z_U为$f^{-1}(U)$上的一个有效除子，并且关于所有U的Z_U，可以贴合成S上的一个有效除子Z。定义$Z(\mathscr{F})=Z$，它是由$\mathscr{F}$所唯一确定的。

然后定义关于$\mathscr{F}$的变动部分$M(\mathscr{F})$为$D-Z(\mathscr{F})$，它是S上的一个除子。并且对f的一条选定的纤维F_0，定义$N(\mathscr{F})=M(\mathscr{F})-\mu_f(\mathscr{F})F_0$，它是$S$上的一个Q-除子。这里$\mu_f(\mathscr{F})$是$\mathscr{F}$的最后斜率（见定义A1.19）。

设$\mathscr{L}$为C上的一个充分丰富的可逆层，使得$\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$和$\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}$均由整体截面生成。则设$L$为$S$上对应于$f^*\mathscr{L}$的一个除子，$|D+L|$中所有对应于$H^0(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L})$中截面的除子构成一个子系，这个子系的固定部分即等于$Z(\mathscr{F})$。所以我们把$Z(\mathscr{F})$称为关于$\mathscr{F}$的"固定部分"。

设 Σ 为 f 的临界点全体，则 $Z(\mathscr{F})$ 关于一个 Σ-基变换的拉回等于关于 $\mathscr{F}$ 的拉回的固定部分。

引理 6.1.3 $N(\mathscr{F})$ 数值正。

证明 只要证明对任一正有理数 $\varepsilon>0$，$N_\varepsilon=N(\mathscr{F})+\varepsilon F_0$ 是数值正的。同时若 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为一 d 次 Σ-基变换，$N(\mathscr{F})+\varepsilon F_0$ 数值正仅当 $N(\tilde{\mathscr{F}})+\varepsilon d\tilde{F}_0$ 数值正，这里用"$\sim$"表示有关对象在 π 下的拉回，$\tilde{F}_0$ 为拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 的一条纤维。于是由定理 1.2.5，可设 $\mu_f(\mathscr{F})-\varepsilon$ 为正整数，且对于 C 上的一个一般点 p，$\mathscr{F}$ 在 p 上的茎由其整体截面生成。特别地，$|N_\varepsilon|$ 不空。

另一方面，设 F 为 f 在 p 上的纤维，由定义知 $\mathscr{F}_p$ 对应于 $|D|_F|$ 的一个子系，其固定部分恰为 $Z|_F$。因此由 $\mathscr{F}_p$ 的整体生成性，N_ε 限制在 F 上没有固定点。于是对于 S 中任一非垂直曲线 E，$|N_\varepsilon|$ 中都可找到不含 E 的有效除子，因此 $N_\varepsilon E\geqslant 0$。

若 E 为 S 中的垂直曲线，则 $N_\varepsilon E$ 等于 E 与 N_ε 加上 C 上的一个充分丰富的除子的原象的交。但由定义后者没有固定部分，所以也有 $N_\varepsilon E\geqslant 0$。∎

引理 6.1.4 记号如前，设 D 为数值正，

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

为 $\mathscr{E}=f_*\mathcal{O}_S(D)$ 的一个滤过，$Z_i=Z(\mathscr{E}_i)$，$N_i=N(\mathscr{E}_i)$，$\mu_i=\mu_f(\mathscr{E}_i)$，$d_i=N_iF(i=1,\cdots,n)$，其中 F 为 f 的一条一般纤维，则

$$D^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}(d_i+d_{i+1})(\mu_i-\mu_{i+1}),$$

这里令 $d_{n+1}=DF$，$\mu_{n+1}=0$。

证明 注意当 $i<j$ 时，Z_i-Z_j 是有效除子。因为 N_i 数值正，置 $D=N_{n+1}$，归纳之有

$$\begin{aligned}N_i^2&=N_i(N_{i-1}+(Z_{i-1}-Z_i)+(\mu_{i-1}-\mu_i)F)\\&\geqslant N_i(N_{i-1}+(\mu_{i-1}-\mu_i)F)\\&\geqslant N_{i-1}^2+(d_{i-1}+d_i)(\mu_{i-1}-\mu_i).\ ∎\end{aligned}$$

在上面的引理中，设 $D=K_{S/C}$，很快就能导出纤维化的斜率公式：

定理 6.1.5　设 $f: S \longrightarrow C$ 为一亏格 $g \geqslant 2$ 的非局部平凡相对极小纤维化。则

$$\lambda_f \geqslant \frac{4g-4}{g},$$

且等号仅在 f 为超椭圆纤维化或者 $f_*\omega_{S/C}$ 为半稳定层时成立。

证明　设

$$0 = \mathscr{E}_0 \subsetneqq \mathscr{E}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathscr{E}_n = f_*\omega_{S/C}$$

为 $f_*\omega_{S/C}$ 的 Harder 滤过。注意 $N(f_*\omega_{S/C})F = 2g-2$。如果 $n=1$，则 $f_*\omega_{S/C}$ 半稳定，定理由引理 6.1.4 立即可得。故设 $n \geqslant 1$。若

$$\mu(\mathscr{E}_1) + \mu_f(f_*\omega_{S/C}) > 2\mu(f_*\omega_{S/C}),$$

则对滤过 $0 = \mathscr{E}_0 \subsetneqq \mathscr{E}_1 \subsetneqq f_*\omega_{S/C}$ 运用引理 6.1.4,

$$K_{S/C}^2 \geqslant (2g-2)(\mu(\mathscr{E}_1) + \mu_f(f_*\omega_{S/C})) > (4g-4)\mu(f_*\omega_{S/C})$$
$$= \frac{4g-4}{g}\chi_f.$$

若不然，则对 $f_*\omega_{S/C}$ 的上述 Harder 滤过运用引理 6.1.4 并注意 $d_i \geqslant 2\mathrm{rk}(\mathscr{E}_i) - 2$（对 f 的一条一般纤维运用 Clifford 引理），得

$$K_{S/C}^2 \geqslant (4g-4)\mu_n + \sum_{i=1}^{n-1} (4r_i - 2)(\mu_i - \mu_{i+1})$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n} r_i(\mu_i - \mu_{i+1}) - 2(\mu_1 + \mu_n)$$

$$= 4\chi_f - 2(\mu_1 + \mu_n) \geqslant \frac{4g-4}{g}\chi_f,$$

这里 $r_i = rk(\mathscr{E}_i)$，$\mu_i = \mu_f(\mathscr{E}_i)$。如果等号成立，则必须有 $d_i = 2r_i - 2$，$r_{i+1} = r_i + 1$ 对所有的 i 成立，因此 Clifford 引理说明 f 的一般纤维是超椭圆的。▌

注 6.1.6　定理 6.1.5 可以看成一般型曲面的 Noether 不等式 $K_S^2 \geqslant 2\chi(\mathcal{O}_S) - 6$ 在纤维化情形时的对应。

注 6.1.7　当 f 为非超椭圆纤维化时，我们猜测 λ_f 应当满足一个比定理 6.1.5 更强的不等式。例如，这时当 $g=3$ 时，$\lambda_f \geqslant 3$；当 $g=4$ 时，$\lambda_f \geqslant 10/3$，见[Ch2]。

定理 6.1.5 有一个有趣的推论。

命题 6.1.8 如果相对极小纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的亏格 $g\geqslant 2$ 且斜率 $\lambda_f<4$，则 S 的代数基本群的垂直部分 V_f 为有限群。特别地，$q_f=0$(注 2.7.12)。

证明 设 $\Pi:\widetilde{S}\longrightarrow S$ 为任一 $n\geqslant 2$ 次平展覆盖，$\tilde{f}:\widetilde{S}\longrightarrow\widetilde{C}$ 为 f 所诱导的纤维化。则

$$\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{S}})=n\chi(\mathcal{O}_S),\ K_{\widetilde{S}}^2=nK_S^2,$$

$$(\tilde{g}-1)(g(\widetilde{C})-1)\geqslant n(g-1)(g(C)-1),$$

这里 $\tilde{g}$ 为 $\tilde{f}$ 的亏格，等式成立当且仅当诱导覆盖 $\pi:\widetilde{C}\longrightarrow C$ 也是平展的。因此 $\lambda_{\tilde{f}}\leqslant\lambda_f$，于是由定理 6.1.5，$\tilde{g}$ 有上界。由于 $g\geqslant 2$，Π 限制在 $\tilde{f}$ 的纤维上的次数也有上界。∎

注 6.1.9 事实上，用与定理 6.1.5 的证明类似的方法，作者证明了[X4]更精确的结论：当 $\lambda_f<4$ 时，V_f 最多为 $\mathbf{Z}_2$，且 $V_f=\mathbf{Z}_2$ 仅当 f 为超椭圆纤维化时，这时由定理 5.2.8，

$$\lambda_f\geqslant 4-\frac{1}{g-1}.$$

同样的方法给出以下引理：

引理 6.1.10 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 $g\geqslant 2$ 的纤维化。对于 $f_*\omega_{S/C}$ 的任一饱和子层 E，有 $\mu(E)\leqslant\dfrac{6}{g-1}\chi_f$。

证明 设 E' 为 $f_*\omega_{S/C}$ 的 Harder 滤过的第一项，对滤过 $0\subsetneqq E'\subsetneqq f_*\omega_{S/C}$ 运用引理 6.1.4，得

$$(2g-2)\mu(E)\leqslant(2g-2)\mu(E')\leqslant K_{S/C}^2\leqslant 12\chi_f. \quad ∎$$

§6.2 正性和有限性定理

我们首先来证明第二章中提到的正性定理。

定理 6.2.1 (Parshin-Arakelov, [Pa][Ara]) 设 $f:S\longrightarrow C$ 为一亏格 $g\geqslant 2$ 的纤维化。如果 f 不是解析纤维丛，则 $\chi_f>0$(因此由命题 2.6.6 的推论，也有 $K_{S/C}^2>0$)。

证明 由于注 2.4.12，我们可设 $e_f=0$，也就是说 f 是光滑的。因此 f 的模映射 $\theta: C\longrightarrow\overline{\mathcal{M}}_g$ 的象落在 $\mathcal{M}_g$ 中。

设 $\mathscr{C}$ 为 C 的泛覆盖空间，$\varphi: \mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{C}$ 为 f 的拉回，$\mathscr{V}=R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\mathscr{S}}$，$\mathscr{U}=R^1\varphi_*\mathbf{Z}$。于是 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{C}$ 上的 $\mathbf{Z}^{2g}$-常层，且 $j:\mathscr{J}=\mathscr{V}/\mathscr{U}\longrightarrow\mathscr{C}$ 是 φ 的雅可比簇纤维化。固定 φ 的一条纤维 F_0，并且取 $H^1(F_0, \mathbf{Z})$ 的一组标准基 $\alpha_1(F_0), \cdots, \alpha_g(F_0), \beta_1(F_0), \cdots, \beta_g(F_0)$。因为 $\mathscr{U}$ 是离散的，存在 $\mathscr{U}$ 的一组唯一确定的截面 $\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g$，它们在 $\mathscr{C}$ 的每一点 p 上生成 $\mathscr{U}$ 的茎 $H^1(\varphi^{-1}(p), \mathbf{Z})$，且若 $p_0=\varphi(F_0)$，$\alpha_i|_{p_0}=\alpha_i(F_0)$，$\beta_i|_{p_0}=\beta_i(F_0)$。因此这一组截面在每一点 $p\in\mathscr{C}$ 上的限制都是 $H^1(\varphi^{-1}(p), \mathbf{Z})$ 的一组标准基。进一步地，取 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_g)$ 为 $\mathscr{V}$ 的基，并对 $p\in\mathscr{C}$ 用这组基表示 $\beta_1|_p, \cdots, \beta_g|_p$，就得到一个矩阵 $Z(p)=(z_{ij}(p))\in\mathscr{H}_g$ 使得 $\beta_j|_p=\sum_{i=1}^g z_{ij}(p)\alpha_i|_p$。因此有一个映射 $\Theta:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{H}_g$，它是 θ 的一个拉回。特别地 Θ 的象是 $\mathscr{H}_g$ 中的一条解析曲线。

现在设 v 为 $\mathscr{H}_g$ 上的一个权为-1 的非零半纯模函数。v 对应于 $\det(\mathscr{V})$ 的一个半纯截面 σ，如果对于每个 $p\in\mathscr{C}$ 定义 $\sigma|_p=v(\Theta(p))\alpha_1|_p\wedge\cdots\wedge\alpha_g|_p$。我们证明 σ 是 $\det(R^1f_*\mathcal{O}_S)$ 的一个半纯截面 s 的拉回，然后因为 v 是 $\mathcal{M}_g$ 上的一个反丰富可逆层的拉回截面，$\deg s<0$，故由对偶公式(2.2)，$\deg f_*\omega_{S/C}=-\deg s>0$。

事实上，设 $p, q\in\mathscr{C}$ 为 C 中同一个点的原象。则 p 和 q 在 $\mathcal{M}_g$ 中的象为同一点，因而存在 $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in Sp(2g, \mathbf{Z})$，使得 $q=T(p)$。另一方面，通过到 $R^1f_*\mathcal{O}_{\mathscr{S}}$ 的投影，$R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\mathscr{S}}|_p$ 到 $R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\mathscr{S}}|_q$ 有一个自然同构 $\tau: R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\mathscr{S}}|_p\longrightarrow R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\mathscr{S}}|_q$，定义为

$$(\alpha_1|_q, \cdots, \alpha_g|_q)^t=C(\beta_1|_p, \cdots, \beta_g|_p)^t+D(\alpha_1|_p, \cdots, \alpha_g|_p)^t,$$

或

$$(\alpha_1|_q, \cdots, \alpha_g|_q)^t=(CZ+D)(\alpha_1|_p, \cdots, \alpha_g|_p)^t.$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma|_q&=(\det(CZ+D))v(\Theta(q))\cdot(\det(CZ+D)^{-1})\alpha_1|_q\wedge\cdots\wedge\alpha_g|_q\\&=v(\Theta(p))T(\alpha_1|_p)\wedge\cdots\wedge T(\alpha_g|_p)\end{aligned}$$

$=T(\sigma|_p)$,

这就证明了我们的断言。▮

现在和第一节的引理 6.1.10 相结合，我们就可以来证明关于 q_f 的估计了。

命题 6.2.2 若 $f:S\longrightarrow C$ 为亏格 g 的非平凡纤维化，则 $q_f\leqslant\frac{1}{6}(5g+1)$。

证明 显然可设 $g\geqslant 2$. 由引理 2.4.11，有 $f_*\omega_{S/C}\simeq E\oplus\mathcal{O}_C^{\oplus q_f}$, $\mathrm{rk}(E)=g-q_f$。

先设 f 不是解析纤维丛，因此 $\chi_f=\deg E>0$。由引理 6.1.10 得

$$\frac{\chi_f}{g-q_f}=\mu(E)\leqslant\frac{6}{g-1}\chi_f,$$

定理成立。

若 f 为解析纤维丛，设 F 为一纤维，J 为其雅可比簇。则如 §2.2 所述，我们有单值同态 $\mu:\pi_1(C)\longrightarrow \mathrm{Aut}(F)\cong\mathrm{Aut}(J)$。设 G 为 μ 的象。则 f 的雅可比簇纤维化的常值部分在 $f(F)$ 上的纤维 A 为 J 的极大 G-不变商阿贝尔簇。但 A 同时又是曲线 F/G 的雅可比簇，所以

$$q_f=\dim(A)=g(F/G)\leqslant\frac{1}{2}(g+1)\leqslant\frac{1}{6}(5g+1). \quad ▮$$

推论 设 A 为一维数为 d 的极化阿贝尔簇。则只有有限多条曲线 B 满足 $g(B)<\frac{1}{5}(6d-1)$，且 $J(B)$ 含 A 作为子簇。

证明 所有含 A 的 g 维主极化阿贝尔簇构成 $\mathscr{A}_g$ 中的一个子簇 V'。设 $V=V'\cap\mathscr{M}_g$。如果 $\dim(V)\geqslant 1$，存在一个亏格 g 的纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 使得 f 的模映射的象是 V 中的一条曲线。由于 f 的一般纤维的雅可比簇的自同构群是有限的，存在有限基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 使得拉回纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{C}$ 的雅可比簇纤维化的常值部分含 A。因此由命题 6.2.2，$g\geqslant\frac{1}{5}(6d-1)$。▮

注 6.2.3　在[X6]中，作者证明了比命题 6.2.2 更精确的结论：当 $g(C)=0$ 时 $q_f\leqslant\frac{1}{2}(g+1)$。参见后面的问题 6.5.6。

现在我们来讨论相对多典范层的正性。

引理 6.2.4　设 F 为亏格 $g\geqslant 2$ 的纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的一条纤维，$a\in\mathbf{Q}$ 为使 $K_{S/C}-aF$ 成为数值正 $\mathbf{Q}$-除子的最大的非负有理数，n 为一个 $\geqslant 2$ 的整数。设 $\mathscr{E}_n=f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n})$ 为相对 n-典范层的正象。则 $\mu_f(\mathscr{E}_n)\geqslant(n-1)a$。

证明　我们只要证明对于任一小于 a 的有理数 c，都有 $\mu_f(\mathscr{E}_n)\geqslant(n-1)c$。

关于一个 Galois 不变基变换，f 的拉回纤维化的相对 n-典范层的正象等于 $f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n})$ 的拉回，并且数值正 $\mathbf{Q}$-除子的拉回还是数值正的。所以我们可以假设 c 和 a 都是整数，这时 $D_c=K_{S/C}-cF$ 和 $D_a=K_{S/C}-aF$ 都是数值正的除子。因此 $D_a^2\geqslant 0$，于是 $D_c^2=D_a^2+2(2g-2)(a-c)>0$，故由定理 1.1.1，有

$$0=h^1(S,\ -(n-1)D_C)=h^1(S,\ K_S+(n-1)D_C)$$
$$=h^1(S,\ nK_{S/C}+f^*K_C-(n-1)cF).$$

由此及 Leray 谱序列推得

$$0=h^1(C,\ \mathscr{E}_n\otimes\omega_C\otimes\mathscr{O}_C(-(n-1)cf(F)))$$
$$=h^0(C,\ \mathscr{E}_n^\vee\otimes\mathscr{O}_C((n-1)cf(F))).$$

因为这个等式对于 f 关于所有不变基变换的拉回都成立，根据定理 1.2.5 的推论可知

$$\mathscr{E}_n\otimes\mathscr{O}_C((n-1)cf(F))$$

是半负定的，即 $\mathscr{E}_n\otimes\mathscr{O}_C(-(n-1)cf(F))$ 半正定。∎

引理 6.2.5　设 F 为亏格 $g\geqslant 2$ 的相对极小纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的一条一般纤维。则 $K_{S/C}-(\chi_f/g^2)F$ 为数值正的 $\mathbf{Q}$-除子。

证明　设

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=f_*\omega_{S/C}$$

为 $f_*\omega_{S/C}$ 的 Harder 滤过，并设 $\mu_i=\mu_f(\mathscr{E}_i)$，$r_i=\mathrm{rk}(\mathscr{E}_i)$。对于 $j=1,\cdots,g$，设 i 为满足 $r_i\geqslant j$，$r_{i-1}<j$ 的指标，并设 $h_j=\mu_i$。于

是 $h_1\geqslant h_2\geqslant\cdots\geqslant h_g$，且

$$\sum_{j=1}^{g}\frac{2g-2j+1}{g^2}\chi_f=\chi_f=\deg f_*\omega_{S/C}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}r_i(\mu_i-\mu_{i+1})=\sum_{j=1}^{g}h_j,$$

故存在 j 使得 $h_j\geqslant(2g-2j+1)\chi_f/g^2$，从而存在 i 使得 $\mu_i\geqslant(2g-2r_i+1)\chi_f/g^2$。设 Z 为关于 $\mathscr{E}_i$ 的固定部分，$d=ZF$，M 为其变动部分。则 M 在 F 上的限制为 $|K_F|$ 的一个维数为 r_i-1 的子线性系，因而由 Clifford 引理得 $MF\geqslant 2r_i-2$，或 $d\leqslant 2g-2r_i$。特别地，Z 中任一非垂直分支的重数不超过 $2g-2r_i$。

现在设 Γ 为 S 中的任一曲线，$D=K_{S/C}-(\chi_f/g^2)F$。如果 Γ 是垂直曲线，则 $D\Gamma=K_{S/C}\Gamma\geqslant0$，所以可设 Γ 非垂直。这时如果 Γ 不在 Z 中，则由引理 6.1.3 以及 $\mu_i\geqslant0$ 得

$$D\Gamma=Z\Gamma+M\Gamma\geqslant M\Gamma\geqslant0;$$

否则，设 $m\leqslant 2g-2r_i$ 为 Γ 在 Z 中的重数，根据相对相伴公式有

$$(m+1)D\Gamma\geqslant(mK_{S/C}+(K_{S/C}-\mu_iF))\Gamma$$
$$=(mK_{S/C}+(Z+N(\mathscr{E}_i))\Gamma$$
$$\geqslant(mK_{S/C}+Z)\Gamma\geqslant m(K_{S/C}+\Gamma)\Gamma\geqslant0. \blacksquare$$

由引理 6.2.4 和 6.2.5 即得以下定理：

定理 6.2.6 对于 $g\geqslant2$ 和 $n\geqslant2$，$\mu_f(f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n}))\geqslant(n-1)\chi_f/g^2$。特别地，当 f 不是解析纤维丛时，$f_*(\omega_{S/C}^{\otimes n})$ 是正定的。

现在我们来考虑纤维化的截面，并证明非局部平凡纤维化只有有限多条截面。

定理 6.2.7 设 E 为亏格 $g\geqslant2$ 的非局部平凡纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 的一条截面。则

$$\frac{1}{4g(g-1)}K_{S/C}^2\leqslant-E^2\leqslant3e_f-K_{S/C}^2+(g(C)-1)(4g-2).$$

证明 第一个不等式可从 Hodge 指标定理直接推出：设 F 为一纤维，存在 $a\in\mathbf{Q}$ 使得 $(K_{S/C}-(2g-2)E+aF)K_{S/C}=0$，故 $K_{S/C}^2+4g(g-1)E^2=(K_{S/C}-(2g-2)E+aF)^2\leqslant0$。

另一方面，对开曲面 $S'=S-E$ 运用对数宫冈不等式 $(K_S+$

$E)^2 \leqslant 3c_2(S') = 3c_2(S) - 3\chi_{top}(E)$ [Sa]，可得右边的不等式。 ∎

推论(Grauert-Manin, [Gra] [Manin]) 亏格 $g \geqslant 2$ 的非局部平凡纤维化 $f: S \longrightarrow C$ 只有有限多条截面。

证明 对于 f 的任一条截面 E，设 $\widetilde{E} = (2g-2)E + E^2F$，则 $\widetilde{E}K_{S/C} = 0$，$\widetilde{E}^2 = 4g(g-1)E^2$。因此 $\widetilde{E}$ 在 $NS(S)$ 中的象落在 $K_{S/C}$ 的正交补空间 P 中。而由于 $K^2_{S/C} > 0$(定理 6.2.1)，P 中的相交二次形式是负定的，且定理 6.2.7 说明 $\widetilde{E}^2$ 有下界，因此该象在 P 的一个有限子集合 Σ 中。

现在我们证明，如果 E_1 和 E_2 是两条截面，使得 $\widetilde{E}_1$ 和 $\widetilde{E}_2$ 在 P 中的象相同，则 $E_1 = E_2$，因此 f 的截面数不超过 $|\Sigma|$：事实上，这时 $\widetilde{E}_1 \sim \widetilde{E}_2$ 且 $\widetilde{E}_1^2 = \widetilde{E}_2^2$，因而 $E_1^2 = E_2^2$，从而 $E_1 \sim E_2$，特别地 $E_1E_2 = E_1^2 < 0$，这只在 $E_1 = E_2$ 时才有可能。 ∎

与 Grauert-Manin 定理对应的是固定底曲线和临界点集合后纤维化的有限性：

定理 6.2.8(Parshin-Arakelov, [Pa][Ara]) 给定整数 $g \geqslant 2$，曲线 C 以及 C 上的有限多个点 $p_1, \cdots, p_n$，最多只存在有限多个互不同构的非局部平凡亏格 g 纤维化 $f: S \longrightarrow C$，以 $\{p_1, \cdots, p_n\}$ 为临界点集。

Arakelov 在 [Ara] 中的方法还可以很容易地导出关于 χ_f 和临界点个数之间关系的一个重要的估计式。

定理 6.2.9(Arakelov) 设 $f: S \longrightarrow C$ 为亏格 $g \geqslant 2$ 的一个非局部平凡半稳定纤维化，s 为 f 的临界点个数。则

$$\chi_f \leqslant (g - q_f)\left(g(C) - 1 + \frac{1}{2} s \right).$$

当 $C \cong \mathbf{P}^1$ 时，对 s 的下界我们有更精确的估计。

定理 6.2.10(Beauville, [B4]) 设 $f: S \longrightarrow \mathbf{P}^1$ 为非局部平凡半稳定纤维化。则 $s \geqslant 4$，且若等号成立，则 S 是代数单连通的，$p_g(S) = q(S) = 0$，且 f 的奇异纤维的不可约分支都是（可能是奇异的）有理曲线。

§6.3 小平纤维化

定义 6.3.1 一个纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 称为小平纤维化，如果 f 是光滑的，但不是解析纤维丛。

定义 6.3.1 告诉我们，小平纤维化 f 满足 $e_f=0$, $\chi_f>0$，所以 $\lambda_f=12$。此外，考察模映射 $\varphi:C\longrightarrow\overline{\mathscr{M}}_g$，这里 g 为 f 的亏格，则 φ 的象完全落在 $\mathscr{M}_g$ 中，特别地，$\mathscr{M}_g$ 包含一条紧致曲线，因此 $g\neq 1$，又由定理 4.2.4，f 一定是非超椭圆的，特别地，$g\geqslant 3$。另一方面，有以下命题：

命题 6.3.2 对于一个小平纤维化 $f:S\longrightarrow C$,

$$(g-1)(g(C)-1)\geqslant 3\chi_f\geqslant 3.$$

证明 由宫冈-丘不等式(见定理 1.4.3 的 4)),

$$12\chi_f+8(g-1)(g(C)-1)=K^2_{S/C}+8(g-1)(g(C)-1)=K^2_S$$
$$\leqslant 9\chi(\mathscr{O}_S)=9\chi_f+9(g-1)(g(C)-1)。\ \blacksquare$$

推论 小平纤维化满足 $g(C)\geqslant 2$，且 $g(C)=2$ 时 $g\geqslant 4$。

引理 6.3.3 对任一 $g\geqslant 3$，存在亏格为 g 的小平纤维化。

证明 设 $\mathscr{M}_g$ 为亏格为 g 的曲线的模空间，$\overline{\mathscr{M}}_g$ 为它的佐武紧致化。根据 A2.10 后面的注，$\Delta=\overline{\mathscr{M}}_g-\mathscr{M}_g$ 为射影簇 $\overline{\mathscr{M}}_g$ 中的一个闭子簇，且 $\operatorname{codim}(\Delta)=2$。因此 $\overline{\mathscr{M}}_g$ 中存在一条与 Δ 不相交的射影曲线 C'。对于一个适当的覆盖 $\pi:C\longrightarrow C'$，存在一个半稳定纤维化 $f:S\longrightarrow C$，使得对于 C 中的每一点 p，p 在 π 下的象代表的曲线同构于 f 在 p 上的纤维。因为 $C'\in\mathscr{M}_g$，f 的所有纤维都是光滑的，即 f 为小平纤维化。$\blacksquare$

注意引理 6.3.3 的证明完全是"理论性"的，它没有给出任何实际构造小平纤维化的途径。事实上，至目前为止，还没有人得到过具体的亏格 3 的小平纤维化的例子。人们所知道的只有下面的例子。

例 6.3.4(小平邦彦，[Ko3]) 小平构造法的基本想法是：从一个常模的光滑纤维化 $\varphi:\tilde{P}\longrightarrow C$ 出发，如果存在一个非平展的

有限覆盖 $\theta: S \longrightarrow \tilde{P}$，它在$\tilde{P}$上的分枝轨迹 $\tilde{R}$ 到C的投影是平展的，则 φ 诱导的纤维化 $f: S \longrightarrow C$ 是光滑的；如果更进一步地，$\tilde{R}$ 与 $K_{\tilde{P}/C}$ 相交大于零，则 χ_f 也大于零，因此f是变模的。

具体地说，设E为一亏格 >1 的曲线，$\tau: D \longrightarrow E$ 为一 $r \geq 2$ 阶的平展覆盖，R为τ在 $P = E \times D$ 中的图，$\varphi: P \longrightarrow E$ 为P的第一个投影。注意φ诱导R到E的一个r阶平展覆盖。显然 $K_{P/E}R > 0$。我们证明一定存在一个基变换 $\pi: C \longrightarrow E$ 使得存在一个r阶循环覆盖 $\rho: S \longrightarrow \tilde{P} = P \times_E C$，恰以$R$在$\tilde{P}$中的原象$\tilde{R}$为分枝轨迹。于是诱导纤维化 $f: S \longrightarrow C$ 即为一小平纤维化。

事实上，可以构造E上的一个离散的拓扑纤维丛$\mathscr{S}$，对于E的每个开集U，使$\mathscr{S}_U$为 $P_U = \varphi^{-1}(U)$ 的所有以 $R_U = R \cap \varphi^{-1}(U)$ 为分枝轨迹的r阶循环覆盖的等价类所成的集合。这样的循环覆盖一一对应于 $\mathrm{Pic}(P_U)$ 中使得 $r\delta \equiv R_U$ 的元素δ，因而当U为一同胚于单位圆盘Δ的小邻域时，$\mathrm{Pic}(P_U) \cong \mathrm{Pic}(D)$，所以这样的元素共有 $r^{2g(D)}$ 个。从中也可看出，$\mathscr{S}$以 $\mathrm{Pic}^0(D)$ 中所有r阶元素生成的有限子群 $\mathrm{Pic}_r^0(D)$ 为结构群。设 $\theta: \pi_1(E) \longrightarrow \mathrm{Pic}_r^0(D)$ 为关于$\mathscr{S}$的单值同态。设 $\pi: C \longrightarrow E$ 为对应于 $G = \pi_1(E)/\mathrm{Ker}(\theta)$ 的有限次平展覆盖。则如定义 2.8.1 中的注所述，$\mathscr{S}$在C上的拉回是平凡的，因此有一个截面。这个截面于是对应于 $\tilde{P} = P \times_E C$ 的一个r阶循环覆值 $\rho: S \longrightarrow \tilde{P}$，它以$\tilde{R}$为分枝轨迹。这就是我们所求的。

注意：因为G是一个交换群，且其中的元都以r为其阶，覆盖π最多是 $r^{2g(E)}$ 次的。一般地，如果我们设 $\pi: C \longrightarrow E$ 为对应于 $\mathrm{Pic}_r^0(E)$ 的 $r^{2g(E)}$ 次平展覆盖，则π一定满足我们的要求。这时通过简单的计算可知

$$g = sr^2 + \frac{1}{2}r(r-1) + 1, \quad g(C) = Ns + 1,$$

$$\chi_f = \frac{1}{6}Ns(r^2 - 1),$$

这里g为f的亏格，$s = g(E) - 1$，$N = r^{2g(E)}$。特别地，如果取 $r =$

2, $g(E)=2$, 就得到一个亏格 6 的小平纤维化 $f:S\longrightarrow C$, 满足

$$g(C)=17,\quad \chi_f=8,\quad K^2_{S/C}=96.$$

这时的曲面 S 满足

$$\chi(\mathcal{O}_S)=88,\ K_S^2=736,\ K_S^2/\chi(\mathcal{O}_S)=8.36.$$

注意:S的陈数 c_1^2/c_2 在 $r=6$, $g(E)=2$时,取得最大值 $\dfrac{239}{102}$.

例 6.3.5 作为前例的一个变化, 有下面的构造. 虽然它给出的斜率与前例相同,但是当循环覆盖的次数 r 大于 2 时,这样得到的纤维化的亏格和不变量比前面的方法要小.

设E为一亏格 2 的曲线,$\tau:D\longrightarrow E$ 为一平展二次覆盖, R 为 τ 在 $P=E\times D$ 中的图, $\varphi:P\longrightarrow E$ 为P的第一个投影. 设 $r\geqslant 3$ 为一整数. 我们的目的是找出一个基变换 $\pi:C\longrightarrow E$, 使得存在一个 r 阶循环覆盖 $\rho:S\longrightarrow\widetilde{P}=P\times_E C$, 以 R 在 $\widetilde{P}$ 中的原象 $\widetilde{R}$ 为分枝轨迹. 于是如前例, 诱导纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 为所求的小平纤维化.

我们和前例一样构造 $\mathscr{S}$. 注意当 U 为单连通小邻域时, R_U 由 φ 的两个截面 R'、R'' 构成. 因此不难看出 P_U 的以 R_U 为分枝轨迹的 r 阶循环覆盖一一对应于使得 $r\delta\equiv R'-R''$ 的元素 $\delta\in\mathrm{Pic}^0(P_U)\cong\mathrm{Pic}^0(D)$: 设 $\mathscr{L}_i=\mathcal{O}_{P_U}(R'+i\delta)(i=1,\cdots,r-1)$, 则层 $\mathscr{E}=\mathcal{O}_{P_U}\oplus\mathscr{L}_1\oplus\cdots\ominus\mathscr{L}_{r-1}$ 上有一个自然的乘法结构, 使得 $\mathrm{Spec}(\mathscr{E})$ 即为所求的覆盖空间. 于是我们和前例一样得到一个单值同态 $\theta:\pi_1(E)\longrightarrow\mathrm{Pic}^0_r(D)$. 设 $\pi:C\longrightarrow E$ 为对应于 $\mathrm{Pic}^0_r(E)$ 的平展覆盖, 则 $\mathscr{S}\times_E C$ 是平凡的, 因此有一个截面对应于一个 r 阶循环覆盖 $\rho:S\longrightarrow\widetilde{P}$, 以 $\widetilde{R}$ 为分枝轨迹. 诱导的小平纤维化 $f:S\longrightarrow C$ 有

$$g=3r,\ g(C)=r^4+1,\ \chi_f=\frac{1}{3}(r^5-r^3).$$

§ 6.4 例

例 6.4.1(Horikawa, 见[In]) 这是一个满足 $K^2=9\chi(\mathcal{O}_S)$

的曲面，它带有一个亏格为16的纤维化。

取C为一带有一个5阶自同构γ的亏格2的曲线，由Hurwitz公式可知γ在C上恰有三个不动点p_1, p_2, p_3，并且$C/\langle\gamma\rangle\cong\mathbf{P}^1$。设$\varphi: C\longrightarrow\mathbf{P}^1$为投影映射，$P=C\times C$。用$\Delta$记$\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$中的对角线，考虑$P$中的除子$R=(\varphi\times\varphi)^*\Delta$。$R$由五条曲线$\Gamma_i(i=0, \cdots, 4)$组成，其中$\Gamma_i=\{(x, \gamma^i(x))\mid x\in C\}$，它们在三个点$(p_i, p_i)$ $(i=1, 2, 3)$上同时相交。设$\rho: \widetilde{P}\longrightarrow P$为对这三个点的爆发，$E_i$为$(p_i, p_i)$在$\widetilde{P}$中的原象，$\widetilde{R}=\rho_*R-5(E_1+E_2+E_3)$为$R$的严格原象。

现在$\Delta\equiv\mathbf{P}^1\times\varphi(p_1)+\varphi(p_1)\times\mathbf{P}^1$，所以$R\equiv5(C\times p_1+p_1\times C)$，因此存在$\widetilde{P}$上的可逆层$\mathscr{L}$使得$\mathscr{L}^{\otimes-5}\cong\mathscr{O}_{\widetilde{P}}(\widetilde{R})$。于是$\widetilde{R}$对应于$\mathscr{L}^{\otimes5}$到$\mathscr{O}_{\widetilde{P}}$中的一个嵌入，它定义了层$\mathscr{F}=\mathscr{O}_{\widetilde{P}}\oplus\mathscr{L}\oplus\mathscr{L}^{\otimes2}\oplus\mathscr{L}^{\otimes3}\oplus\mathscr{L}^{\otimes4}$上的一个环结构，使得$S=\mathrm{Spec}(\mathscr{F})$为一光滑曲面，且投影映射$d: S\longrightarrow\widetilde{P}$为一五次循环覆盖，以$\widetilde{R}$为分枝轨迹。$P$到$C$的第一个投影诱导$S$上的一个纤维化$f: S\longrightarrow C$，且简单的计算给出下面的不变量：

$$\chi_f=10,\ K_{S/C}^2=105,\ g=16,\ \lambda_f=10.5,$$
$$\chi(\mathscr{O}_S)=25,\ K^2=9\chi(\mathscr{O}_S)=225.$$

这里g为f的亏格。

从Horikawa的这个例子出发，陈志杰[Ch3]证明了下面的曲面存在性定理：

定理 6.4.2 存在一个常数C，使得对于任意满足

$$2x-6\leqslant y\leqslant9x-C$$

的整数对(x, y)，存在极小一般型曲面S，使得$\chi(\mathscr{O}_S)=x$，$K_S^2=y$。

证明 循环覆盖$d: S\longrightarrow\widetilde{P}$对应于$S$上的一个5阶自同构群$G$。对于任一不变基变换$\pi: \hat{C}\longrightarrow C$，设$\hat{f}: \hat{S}\longrightarrow\hat{C}$为拉回纤维化，$G$的拉回是$\hat{S}$上的一个5阶自同构群，它保持$\hat{f}$的所有纤维不变。

为了构造$\hat{f}$上的纤维扭曲，设F_0为$\hat{f}$的一条一般纤维，

$f_\Delta: S_\Delta \longrightarrow \Delta$ 为 F_0 周围的局部纤维化，$f'_\Delta: S'_\Delta \longrightarrow \Delta$ 为 f_Δ 的一个以 G 为扭曲群的中心纤维扭曲。这个中心纤维扭曲的扭曲向量可以如下确定：

设 $\pi: \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$ 为扭曲基变换，$\tilde{f}: S_{\tilde{\Delta}} \longrightarrow \tilde{\Delta}$ 为 f_Δ 和 f'_Δ 的共同拉回，并仍以 F_0 记 $\tilde{f}$ 的中心纤维。设 γ 为 G_3 (如 2.6.11 中所定义)中的一非单位元，p 为 γ 在 F_0 上的一个不动点(即 $\hat{R}$ 的拉回与 F_0 的一个交点)，并设 5 阶单位根 ξ 为 γ 在切空间 $T_p(F_0)$ 上的诱导作用的特征值。则 γ 在 $T_p(S_{\tilde{\Delta}})$ 上的作用的另一个特征值为 ξ^α，其中 $\alpha = \alpha(F_0)$ 不依赖于 γ 的选取，且由上面的例子中 S 的构造可知它也不依赖于 p 的选取。因此 p 在 S'_Δ 中的象是一个 $(5, 1, \alpha)$ 型的循环商奇点的解消(见[BPV] 的 § III.5)。由于 γ 在 F_0 上共有 5 个相同类型的不动点，直接的计算给出下面的局部扭曲向量表：

α	F_0 的扭曲向量
1	(6, 39)
2	(7, 46)
3	(7, 46)
4	(8, 48)

现在设 $f': S' \longrightarrow \hat{C}$ 为 $\hat{f}$ 的一个纤维扭曲，以 $\hat{f}$ 的光滑纤维 $F_1, \cdots, F_n$ 为扭曲纤维。对于每条 F_i，我们有如上定义的一个整数 $\alpha_i = \alpha(F_i) \in \{1, 2, 3, 4\}$。称 F_i 为 α_i 型的纤维，并以 n_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ 记 α_j 型纤维的个数。于是这个纤维扭曲的扭曲向量为

$$(6n_1 + 7(n_2 + n_3) + 8n_4,\ 39n_1 + 46(n_2 + n_3) + 48n_4).$$

注意：对于基本纤维扭曲，我们有 $n = 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 5$。反之，对任一对满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 5$ 的正整数 (α_1, α_2)，都存在一个这样的基本纤维扭曲。由此不难推出，存在 $\hat{f}$ 的一般纤维扭曲 f' 的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{4} j n_j \equiv 0 \pmod 5.$$

特别地，考虑如下三种类型的纤维扭曲：

$$n = 3,\ n_1 = 2,\ n_3 = 1;\quad n = n_1 = 5;\ n = 2,\ n_1 = n_4 = 1.$$

它们的扭曲向量分别为

$$(19, 124),\ (30, 195),\ (14, 87).$$

由于这三个扭曲向量的两个分量相互独立且分别互素，存在两个常数 C_1、C_2 使得对于任意满足

$$\frac{87}{14}(x-\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}}))+C_2\leqslant y-K_{\hat{S}}^2\leqslant\frac{124}{19}(x-\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}}))-C_1$$

的整数对 (x, y)，一定可以从 $\hat{f}$ 出发经过这三种纤维扭曲的组合得到一个纤维化 $\tilde{f}:\tilde{S}\longrightarrow\hat{C}$，使得 $x=\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$，$y=K_{\tilde{S}}^2$。因为 $(\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}}), K_{\hat{S}}^2)$ 可以是满足

$$8\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}})<K_{\hat{S}}^2\leqslant 9\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}}),\ K_{\hat{S}}^2-8\chi(\mathcal{O}_{\hat{S}})\equiv 0 \pmod{25}$$

的任意整数对(命题 2.6.10)，这样得到的(x, y)覆盖了区域

$$\frac{87}{14}x+C'\leqslant y\leqslant 9x-C,$$

对于适当的常数 C、C'。最后，左边的不等式可以通过定理 4.3.5 扩展到 $2x-6\leqslant y$。∎

例 6.4.3(Inoue-Livné, [In][Liv]) 设 $\varphi:P\longrightarrow C$ 为级 $N\geqslant 4$ 的椭圆模纤维化(例 3.6.3)，D 为命题 3.6.5 所述的 φ 的 N^2 条截面的和所成的 P 的除子。

引理 6.4.4 若 N 为奇数，则 D 在 $\mathrm{Pic}(P)$ 中 N 可除；若 N 为偶数，则 D 在 $\mathrm{Pic}(P)$ 中 $N/2$ 可除。

证明 设 $F_1, \cdots, F_t$ 为 φ 的 $t=t_N$ 条奇异纤维，F 为一条一般纤维，$\Gamma_{i,0}, \cdots, \Gamma_{i,N-1}(i=1, \cdots, t)$ 为 F_i 的 N 个(-2)-曲线分支，其中 $\Gamma_{i,j}\Gamma_{i,j+1}=\Gamma_{i,N-1}\Gamma_{i,0}=1$，$\Gamma_{i,0}$ 与 D 中的单位截面 D_0 相交。设

$$\delta=ND_0+(N^2-1)\Delta_N F-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{N-1}j(N-j)\Gamma_{i,j}$$

为 P 中的 $\mathbb{Q}$-除子。则 D 数值等价于 $N\delta$：事实上，由于引理 3.6.7，只需验证对于 $B=F$，D_0 或 $\Gamma_{i,j}$，$DB=N\delta B$。而这是直截了当的(注意由定理 3.2.3 和相对相伴公式，$D_0^2=-\chi_\varphi=-N\Delta_N$)。

由简单的计算可知，当 $N\geqslant 5$ 时，Δ_N 是整数，当 $N=4$ 时，$\Delta_N=\dfrac{1}{2}$ 是半整数。因此当 N 为奇数时，δ为整除子，而当 N 为偶数时，

2δ 为整除子。最后由定理 3.5.1 的推论 1，$D-N\delta\in \mathrm{Pic}^0(P)$ 是任意可除的。∎

这个引理说明了若 d 为整除 N（当 N 为奇数时）或 $N/2$（当 N 为偶数时）的一个正整数，存在一个次数为 d 的 Galois 覆盖 $\theta: S\longrightarrow P$，以 D 为分枝轨迹（见 §1.1）。设 $f=f(N, d): S\longrightarrow C$ 为 φ 所诱导的纤维化。我们有

$$g=\frac{1}{2}(d-1)N^2+1,\ g(C)=(N-6)\Delta_N+1,$$

$$K^2_{S/C}=d(K_{P/C}+(d-1)\delta)^2=\frac{d^2-1}{d}N^3\Delta_N,$$

$$e_f=de_\varphi=dNt_N=12dN\Delta_N,$$

因而由相对 Noether 公式，

$$12\chi_f=K^2_{S/C}+e_f=\frac{N}{d}(12d^2+N^2(d^2-1))\Delta_N,$$

$$\lambda_f=\frac{12N^2(d^2-1)}{12d^2+N^2(d^2-1)}>8 \qquad (\text{当 } N>5 \text{ 时})$$

又

$$K^2_S=K^2_{S/C}+8(g-1)(g(C)-1)$$

$$=\frac{d-1}{d}N^2((5d+1)N-24d)\Delta_N,$$

$$\chi(\mathcal{O}_S)=\chi_f+(g-1)(g(C)-1)$$

$$=\frac{N}{12d}(12d^2+N(d-1)(7dN+N-36d))\Delta_N.$$

由此可见 $9\chi(\mathcal{O}_S)-K^2_S=\frac{N}{4d}(6d-N(d-1))^2\Delta_N$，于是 $K^2_S=9\chi(\mathcal{O}_S)$ 当且仅当 $N=\frac{6d}{d-1}$，或 (N, d) 等于

$$(7, 7),\ (8, 4),\ (9, 3) \text{或} (12, 2)$$

时。这时 $(\chi(\mathcal{O}_S), K^2_S)$ 分别为

$$(784, 7056),\ (768, 6912),\ (1296, 11664),\ (2688, 24192),$$

而 $(\chi_f, K^2_{S/C}, g, g(C))$ 分别为

$$(490, 4704, 148, 3),\ (384, 3840, 97, 5),$$

$$(567, 5832, 82, 10),\ (960, 10368, 73, 25),$$

§6.5 问　　题

关于曲面的纤维化有很多有趣的尚未解决的问题. 首先我们碰到的是一系列的存在性问题.

问题6.5.1 是否存在满足

$$\lambda_f=\begin{cases}12-\dfrac{8g+4}{g^2}, & g\text{为偶数;}\\ 12-\dfrac{8g+4}{g^2-1}, & g\text{为奇数.}\end{cases}$$

的超椭圆纤维化?(见定理5.1.7的推论)

当 $g=2$ 时, 类似于引理6.3.3的证明, 利用 $\mathscr{M}_2$ 的佐武紧致化不难证明存在满足 $\lambda_f=7$ 的纤维化(例如见 [X2, Proposition 2.5]), 但人们没有得到过这样的纤维化的具体例子.

同样对于超椭圆的纤维化, 可以从另一个角度提出存在性问题.

问题6.5.2 是否存在超椭圆纤维化 $f:S\longrightarrow C$, 使得 $c_1^2(S)=3c_2(S)$?

问题6.5.3 找出定理4.4.3中余下的四种可能性的例子(或证明其不存在性), 这四种可能性是:

$\{(7,6)\}$, $\{(1,1),(7,5)\}$, $\{2\times(1,1),(6,4)\}$,

$\{(1,1),(3,2),(4,3)\}$.

另一方面, 注6.1.7中的不等式使我们提出这样的问题:

问题6.5.4 找出最佳界 $\lambda=\lambda(g)$ 使得对于所有亏格 g 的纤维化 $f:S\longrightarrow C$, 如果 f 的一般纤维是一条亏格 g 的一般曲线, 则 $\lambda_f\geqslant\lambda$.

这个问题与曲线的模空间有着密切的联系. 例如, 若 $\lambda(g)<5.5$, 则 $\overline{\mathscr{M}}_g$ 的小平维数一定是 $-\infty$.

问题6.5.5 对于小平纤维化 $f:S\longrightarrow C$, 找出

$$\nu=\frac{\chi_f}{(g-1)(g(C)-1)}$$ 的上确界.

因为小平纤维化的 $\lambda_f=12$，这样的上确界等价于 $c_1^2(S)/c_2(S)$ 的一个上确界。因为后者在 $\frac{239}{102}$ 和 3 之间(见 §6.3)，有

$$\frac{35}{306}\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{3}.$$

问题 6.5.6　对于非平凡的亏格 g 纤维化 $f:S\longrightarrow C$，找出不规则性 q_f 的最大值。

上面已经提到(注 6.2.3)，当 $C\cong\mathbf{P}^1$ 时，该最大值为 $\frac{1}{2}(g+1)$。但作者原来猜测的 $\frac{1}{2}(g+1)$ 在所有情况下成立 [X7] 已被 [Pi2] 推翻，那里得到了一个满足 $g=4$，$g(C)=q_f=3$ 的例子。另一方面，命题 6.2.2 中的估计很可能离最佳上界还有相当大的距离。

附记

当 $f:S\longrightarrow C$ 为半稳定纤维化时，Cornalba/Harris [CH] 用另外的方法也独立地得到了不等式 $\lambda_f\geqslant\frac{4g-4}{g}$ (定理 6.1.5)。

定理 6.2.7 中的第一个不等式 $-E^2\geqslant\frac{1}{4g(g-1)}K_{S/C}^2$ 及其证明见于 [Sz]。

附 录

这里所介绍的内容都是很初等的，一般在文献中都被认为是"众所周知"的，然而对于对本书所涉及的问题感兴趣的读者来说，似乎又没有在众所周知的教科书中以合适的方式加以介绍过。为了给读者方便起见，我们将它们收集在这个附录中，介绍的范围和深度严格地以本书所要用到者为限。

§ A1 曲线上的局部自由层

在这一节里考察这样的情况：

设 C 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的一条光滑代数曲线，$\mathscr{E}$ 是 C 上的一个秩为 $r=\mathrm{rk}(\mathscr{E})$ 的局部自由层。当 $r=1$ 时，$\mathscr{E}$ 是可逆层，这种情形是代数曲线的几何理论中的基本内容，可以被看成是局部自由层的一种退化情形，所以在这里一般假设 $r\geqslant 2$。

一般地，设 $\mathscr{F}$ 是任一代数簇 V 上的一个连贯层。$\mathscr{F}$ 中的挠元(即只在 V 的一个余维数 $\geqslant 1$ 的子簇上非零的元）构成一个子层 $\mathscr{F}_t$。如果 $\mathscr{F}_t$ 是零层，则 $\mathscr{F}$ 称为*无挠层*。显然，局部自由层都是无挠的。

引理 A1.1 如果 $\mathscr{E}$ 是光滑曲线 C 上的一个无挠层，则 $\mathscr{E}$ 是局部自由层。

证明 $\mathscr{E}$ 是局部自由层当且仅当关于 C 上的每一个点 p，$\mathscr{E}$ 在 p 的茎是局部环 $\mathscr{O}_{C,p}$ 上的自由模。但 $\mathscr{O}_{C,p}$ 是主理想环，所以它上面的无挠模都是自由的。∎

推论 光滑曲线上局部自由层的子层也是局部自由的。

证明 设$\mathscr{F}$是局部自由层$\mathscr{E}$的一个子层。因为$\mathscr{E}$无挠，$\mathscr{F}$也无挠，所以是局部自由层。]

我们回到光滑曲线的情形。设$\mathscr{E}$是一个局部自由层，$\mathscr{F}$是它的一个子层。则可以作商层$\mathscr{E}/\mathscr{F}$，它一般来说不是局部自由的。例如，取$\mathscr{E}$为一个非常丰富的可逆层，s为$\mathscr{E}$的一个非零整体截面。则s对应子结构层$\mathscr{O}_C$到$\mathscr{E}$中的一个单射同态。其商层$\mathscr{E}/\mathscr{O}_C$显然全由挠元组成。

如果$\mathscr{E}/\mathscr{F}$也是局部自由层，我们把$\mathscr{F}$称为$\mathscr{E}$的饱和子层。如果$\mathscr{E}_1$是$\mathscr{E}$的饱和子层，$\mathscr{E}_2$是$\mathscr{E}_1$的饱和子层，则$\mathscr{E}_2$是$\mathscr{E}$的饱和子层。

如果我们把$\mathscr{E}/\mathscr{F}$的秩定义为它的自由部分的秩，则有秩的可加性：

$$\mathrm{rk}(\mathscr{E})=\mathrm{rk}(\mathscr{F})+\mathrm{rk}(\mathscr{E}/\mathscr{F}).$$

引理 A1.2 设$\mathscr{F}$是局部自由层$\mathscr{E}$的一个子层。存在唯一的一个$\mathscr{E}$的饱和子层$\tilde{\mathscr{F}}$，它包含$\mathscr{F}$，并且和$\mathscr{F}$有相同的秩。

$\tilde{\mathscr{F}}$称为$\mathscr{F}$的饱和化。

证明 设$\mathscr{T}$为$\mathscr{E}/\mathscr{F}$的挠子层，并设$\tilde{\mathscr{F}}$为$\mathscr{T}$在$\mathscr{E}$中的原象。因为$\mathscr{E}/\tilde{\mathscr{F}}$就是$\mathscr{E}/\mathscr{F}$模$\mathscr{T}$的商层，所以是局部自由的，$\tilde{\mathscr{F}}$是饱和子层。显然$\mathrm{rk}(\tilde{\mathscr{F}})=\mathrm{rk}(\mathscr{F})$。

另一方面，设$\mathscr{F}'$为包含$\mathscr{F}$的一个饱和子层。则$\mathscr{E}/\mathscr{F}'$是$\mathscr{E}/\mathscr{F}$的一个无挠商层，所以$\mathscr{F}'$在$\mathscr{E}/\mathscr{F}$中的象包含$\mathscr{T}$，也就是说$\mathscr{F}'\supseteq\tilde{\mathscr{F}}$。再对$\mathscr{E}/\tilde{\mathscr{F}}$和$\mathscr{F}'/\tilde{\mathscr{F}}$用秩的可加性，我们看到$\mathrm{rk}(\mathscr{F}')=\mathrm{rk}(\mathscr{F})$当且仅当$\mathscr{F}'/\tilde{\mathscr{F}}$为零层，即$\mathscr{F}'=\tilde{\mathscr{F}}$。∎

子层的饱和化也可以通过下列方法构造。对于任一连贯层$\mathscr{F}$，我们用$\mathscr{F}^\vee$表示$\mathscr{F}$的对偶层$\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{O})$。于是从正合列

$$0\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}/\mathscr{F}\longrightarrow 0,$$

得到对偶正合列

$$0\longrightarrow(\mathscr{E}/\mathscr{F})^\vee\longrightarrow\mathscr{E}^\vee\longrightarrow\mathscr{F}'\longrightarrow 0,$$

这里$\mathscr{F}'=\mathscr{E}^\vee/(\mathscr{E}/\mathscr{F})^\vee$。留给读者自己证明$\mathscr{F}'^\vee$就是$\mathscr{F}$的饱和化$\tilde{\mathscr{F}}$。

设 $\mathscr{E}$ 为 C 上秩为 r 的一个局部自由层。则 $\mathscr{E}$ 的 r 阶外积 $\wedge^r\mathscr{E}$ 是 C 上的一个可逆层，称为 $\mathscr{E}$ 的行列式层，记作 $\det(\mathscr{E})$。定义 $\mathscr{E}$ 的次数 $\deg\mathscr{E}$ 为 $\deg\det(\mathscr{E})$。我们有以下引理：

引理 A1.3（次数的可加性） 设

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}_2\longrightarrow 0$$

为局部自由层的一个正合列。则 $\deg\mathscr{E}=\deg\mathscr{E}_1+\deg\mathscr{E}_2$。

证明留给读者。

定义 A1.4 对于一个局部自由层 $\mathscr{E}$，我们用 $\mu(\mathscr{E})$ 表示 $\deg\mathscr{E}/\mathrm{rk}(\mathscr{E})$，称为 $\mathscr{E}$ 的斜率。这是一个有理数。

定义 A1.5 设 $\mathscr{E}$ 为一局部自由层。$\mathscr{E}$ 的一个滤过 F 是指一列 $\mathscr{E}$ 的饱和子层 $\mathscr{E}_0, \cdots, \mathscr{E}_n$，使得

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}.$$

F 称为完全滤过，如果 $n=\mathrm{rk}(\mathscr{E})$，或者等价地，$\mathrm{rk}(\mathscr{E}_i)=i$，$i=1, \cdots, n$。

引理 A1.6 任一局部自由层都有完全滤过。

证明 通过对秩的归纳，我们只需证明任一局部自由层 $\mathscr{E}$ 都有一个可逆饱和子层。事实上，存在一个充分丰富的可逆层 $\mathscr{L}$，使得 $H^0(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})\neq 0$。取 $s\in H^0(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})$ 为一非零截面。s 对应于一个单射 $\sigma:\mathscr{O}_C\longrightarrow\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$。把 σ 对 $\mathscr{L}^\vee$ 作张量积，我们就得到 $\mathscr{L}^\vee$ 到 $\mathscr{E}$ 中的一个单射。现在 $\mathscr{L}^\vee$ 在 $\mathscr{E}$ 中的饱和化就是所要的可逆饱和子层。∎

作为引理 A1.6 的一个直接推论，设 $\mathscr{L}$ 为一个可逆层，$\mathscr{E}$ 为局部自由层。则 $\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$ 是秩等于 $\mathrm{rk}(\mathscr{E})$ 的局部自由层，且利用次数的可加性和对秩归纳，得到 $\deg(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})=\deg\mathscr{E}+\mathrm{rk}(\mathscr{E})\deg\mathscr{L}$。于是 $\mu(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})=\mu(\mathscr{E})+\deg\mathscr{L}$。

同样，由次数的可加性和 Euler 特征标的可加性，立即可得曲线上局部自由层的 Riemann-Roch 定理：

定理 A1.7 设 $\mathscr{E}$ 是亏格为 g 的曲线 C 上的一个局部自由层。则

$$\chi(\mathscr{E})=\deg\mathscr{E}-\mathrm{rk}(\mathscr{E})(g-1).$$

证明 取 $\mathscr{E}$ 的一个饱和可逆子层 $\mathscr{E}_1$，将其拓展到一个正合列

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}_2\longrightarrow 0.$$

然后对 $\mathrm{rk}(\mathscr{E})$用归纳法。▮

定理 A1.8 给定一个局部自由层 $\mathscr{E}$，存在数 N 使得对于 $\mathscr{E}$ 的任一子层 $\mathscr{F}$，都有 $\mu(\mathscr{F})\leqslant N$。

证明 设 $\mathscr{F}$ 的秩为 r.则 $\wedge^r\mathscr{F}$ 是 $\wedge^r\mathscr{E}$ 的一个可逆子层。因此我们只需对 $r=1$ 的情形进行证明。但这时 $\mathscr{F}$ 的整体截面也是 $\mathscr{E}$ 的整体截面，所以 $H^0(\mathscr{F})\leqslant H^0(\mathscr{E})$.现在对 $\mathscr{F}$ 运用 Riemann-Roch 定理，立即可得 $\deg\mathscr{F}$ 的一个上界。▮

例 A1.9 定理 A1.8 中的数 N 并不能由 $\mu(\mathscr{E})$ 和 $\mathrm{rk}(\mathscr{E})$ 所确定.例如，对任一正整数 n，层 $\mathscr{E}=\mathscr{O}(n)\oplus\mathscr{O}(-n)$ 是 $\mathbf{P}^1$ 上秩为 2，斜率为 0 的局部自由层。当 n 充分大时，$\mathscr{E}$ 有一个次数充分大的可逆子层 $\mathscr{O}(n)$。

定义 A1.10 设 $\mathscr{E}$ 为一个局部自由层。如果对 $\mathscr{E}$ 的所有真子层 $\mathscr{F}$，我们都有 $\mu(\mathscr{F})<\mu(\mathscr{E})$（相应地 $\mu(\mathscr{F})\leqslant\mu(\mathscr{E})$），则 $\mathscr{E}$ 称为稳定的(相应地，半稳定的)。下面的引理是明显的。

引理 A1.11 若 $\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}_2$ 是两个半稳定的局部自由层之间的一个非零映射，则 $\mu(\mathscr{E}_1)\leqslant\mu(\mathscr{E}_2)$。

定义 A1.12 一个局部自由层 $\mathscr{E}$ 称为不可分解的，如果它不能写成两个饱和子层的直和。

任意局部自由层都可以分解成不可分解层的直和。如果 $\mathscr{E}$ 可以分解成可逆层的直和，则它称为完全可分解的。稳定层显然是不可分解的。一个可分解层是半稳定的当且仅当它的所有不可分解直和因子都是半稳定的，且具有相同的斜率。$\mathscr{E}$ 称为平凡的，如果它是 $\mathscr{O}_C$ 的直和。

局部自由层的直和分解在同构的意义下是唯一的，如果

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}_n$$

和

$$\mathscr{E}=\mathscr{F}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{F}_m$$

是局部自由层 $\mathscr{E}$ 的两个分解成不可分解层的直和分解，则 $m=n$，

并且在重排次序后可得$\mathscr{E}_i \cong \mathscr{F}_i (i=1, \cdots, n)$。

定义 A1.13　设$\mathscr{E}$为C上的一个局部自由层，P为$H^0(\mathscr{E})$的一个子空间。P中的所有截面生成$\mathscr{E}$的一个子层$\mathscr{F}$，它一般不是饱和子层。我们把$\mathscr{F}$的饱和化$\bar{\mathscr{F}}$称为由P生成的饱和子层。

特别地，如果$\mathscr{E}$中由$H^0(\mathscr{E})$生成的饱和子层就是$\mathscr{E}$本身，这时我们称$\mathscr{E}$为几乎处处由整体截面生成的。

$H^0(\mathscr{E})$中的n个整体截面$s_1, \cdots, s_n$称为代数无关的，如果不存在C上的n个有理函数$f_1, \cdots, f_n$，使得$f_1 s_1 + \cdots + f_n s_n = 0$。一个等价的定义是$s_1, \cdots, s_n$生成的$\mathscr{E}$的饱和子层的秩为$n$。

由一个整体截面s生成的可逆饱和子层$\mathscr{L}$的次数等于$\operatorname{div}(s)$的次数，因此$\deg \mathscr{L} \geqslant 0$。

定理 A1.14　$\mathbf{P}^1$上的局部自由层是完全可分解的。

证明　设$\mathscr{E}$是$\mathbf{P}^1$上秩为r的一个局部自由层。我们对r归纳。

先设$r=2$。对$\mathscr{E}$张量一个适当次数的可逆层，我们可设$-1 \leqslant \deg \mathscr{E} \leqslant 0$。由 Riemann-Roch 定理知$H^0(\mathscr{E}) \neq 0$，所以$\mathscr{E}$中有一个次数非负的饱和可逆子层$\mathscr{E}_1$。设

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}_2 \longrightarrow 0$$

为对应的正合列，则下面的引理表明这个正合列分裂。

引理 A1.15　设

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}_2 \longrightarrow 0$$

为曲线C上局部自由层的一个正合列，其中$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$是可逆层。如果

$$\deg \mathscr{E}_2 < \deg \mathscr{E}_1 - 2g(C) + 2,$$

则这个正合列分裂。特别地，这时$\mathscr{E}$是可分解的。

证明　对上述正合列张量$\mathscr{E}_2^\vee$，可设$\mathscr{E}_2 \cong \mathscr{O}_C$。考虑诱导的上同调列

$$H^0(\mathscr{E}) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathscr{E}_2) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathscr{E}_1).$$

由假设$H^1(\mathscr{E}_1)=0$，所以α不是零映射。但$\mathscr{E}_2$由$H^0(\mathscr{E}_2) \cong \mathbf{C}$生成，所以$1$在$\alpha$下的原象生成$\mathscr{E}$中同构于$\mathscr{E}_2$的一个饱和子层。∎

现设 $r\geqslant 3$ 为一般情形，设 $\mathscr{E}_1$ 是 $\mathscr{E}$ 中次数最高的一个可逆饱和子层，并设 $\mathscr{F}=\mathscr{E}/\mathscr{E}_1$。由归纳法假设，$\mathscr{F}$ 完全可分解为：$\mathscr{F}=\mathscr{F}_2\oplus\cdots\oplus\mathscr{F}_r$。现在对每个指标 $i(i=2,\cdots,r)$，$\mathscr{E}$ 中都有一个可逆子层 $\mathscr{E}_i$，它到 $\mathscr{F}$ 中的投影是到 $\mathscr{F}_i$ 的同构，因此，正合列 $0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow 0$ 分裂，且 $\mathscr{E}\cong\mathscr{E}_1\oplus\mathscr{E}_2\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}_r$。

事实上，设 $\mathscr{F}'$ 为 $\mathscr{F}_i$ 在 $\mathscr{E}$ 中的原象。由 $r=2$ 情形的证明，$\mathscr{F}'\cong\mathscr{L}_1\oplus\mathscr{L}_2$。因为 $\mathscr{E}_1$ 也是 $\mathscr{F}'$ 中次数最高的可逆子层，可设 $\mathscr{L}_1=\mathscr{E}_1$，$\deg\mathscr{L}_2\leqslant\deg\mathscr{L}_1$。于是引理 A1.15 说明诱导正合列

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{F}'\longrightarrow\mathscr{F}_i\longrightarrow 0$$

分裂。∎

对于一个一般的局部自由层的研究来说，滤过显然是一个重要的方法。问题在于同一个局部自由层可能有太多不同的滤过。下面的例子可以说明这一点。

例 A1.16 设 $\mathscr{E}$ 为任一曲线 C 上的秩 2 局部自由层，$\mathscr{L}$ 是 C 上的一个可逆层，$\deg\mathscr{L}=N$。当 N 充分大时，$\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$ 是由整体截面生成的。因此我们可以取没有公共零点的两个代数无关的截面 s_1、$s_2\in H^0(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})$，于是对于一个充分一般的复数 c，s_1+cs_2 是 $\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$ 的一个没有零点的整体截面，因此它生成 $\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}$ 的一个饱和可逆子层 $\mathscr{F}\cong\mathscr{O}_C$。这样，我们就在 $\mathscr{E}$ 中找到一个同构于 $\mathscr{L}^\vee$ 的饱和可逆子层 $\mathscr{E}_1$，它可以用来构造 $\mathscr{E}$ 的一个完全滤过。当 N 充分大时，$\mathscr{E}_1$ 的次数可以任意小。

克服上述困难的一个办法是选取极大完全滤过：根据定理 A1.8，我们可以在层 $\mathscr{E}$ 中选取次数最大的一个饱和可逆子层 $\mathscr{E}_1$，再在包含 $\mathscr{E}_1$ 的所有秩为 2 的饱和子层中，选取一个次数最大的为 $\mathscr{E}_2$，如此等等，这样得到一个完全滤过，叫做 $\mathscr{E}$ 的极大完全滤过。极大滤过对于秩为 2 的局部自由层的研究是十分有效的。另外我们有以下定理：

定理 A1.17 设

$$F:0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

为非有理曲线 C 上不可分解的局部自由层 $\mathscr{E}$ 的一个极大完全滤

过，并设 $\mathscr{F}_i=\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$。则

$$\deg\mathscr{F}_i\geqslant\deg\mathscr{E}_1-(i-1)(2g(C)-2)。$$

证明(Atiyah, [At]) 我们对 i 归纳，设 $\mathscr{E}'_i=\mathscr{E}/\mathscr{E}_i$。因为 $\mathscr{E}$ 不可分解，正合列

$$0\longrightarrow\mathscr{E}_i\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}'_i\longrightarrow0$$

不是分裂的，所以它对应于 $\mathrm{Ext}(\mathscr{E}'_i,\mathscr{E}_i)$ 中的一个非零元。特别地，由 Serre 对偶定理得

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_i,\mathscr{E}'_i\otimes\omega_C)\cong\mathrm{Ext}(\mathscr{E}'_i,\mathscr{E}_i)^\vee\neq0。$$

于是存在 $j\leqslant i$ 以及 $\mathscr{F}_j$ 到 $\mathscr{E}'_i\otimes\omega_C$ 的一个非零映射，设 $\mathscr{F}$ 为该映射的象所对应的 $\mathscr{E}'_i$ 的可逆饱和子层。然后由归纳法假设，

$$\begin{aligned}\deg\mathscr{F}&\geqslant\deg\mathscr{F}_j-\deg\omega_C\\&\geqslant\deg\mathscr{E}_1-(j-1)(2g(C)-2)-(2g(C)-2)\\&\geqslant\deg\mathscr{E}_1-i(2g(C)-2)。\end{aligned}$$

因为 F 是极大滤过，我们有 $\deg\mathscr{F}_{i+1}\geqslant\deg\mathscr{F}$，故定理成立。∎

推论 椭圆曲线上的不可分解局部自由层是半稳定的。

极大完全滤过在秩大于 2 的局部自由层的研究中的问题是滤过中各子层的次数仍依赖于滤过的选取。在这时，下述的 Harder 滤过起了很重要的作用：

定义 A1.18 设 $\mathscr{E}$ 为一个局部自由层。$\mathscr{E}$ 的一个滤过

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

称为 Harder 滤过，如果：

1) 所有的中间商层 $\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$，$i=1,\cdots,n$，都是半稳定的，并且

2) 中间商层的斜率递降，即对 $i=2,\cdots,n$，$\mu(\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1})<\mu(\mathscr{E}_{i-1}/\mathscr{E}_{i-2})$。

显然，如果

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

是 $\mathscr{E}$ 的一个 Harder 滤过，则它的对偶

$$0=(\mathscr{E}/\mathscr{E}_n)^\vee\subsetneqq(\mathscr{E}/\mathscr{E}_{n-1})^\vee\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}^\vee$$

是对偶层 $\mathscr{E}^\vee$ 的一个 Harder 滤过。如果 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{E}$ 的任一子层，则 $\mu(\mathscr{F})\leqslant\mu(\mathscr{E}_1)$。

定理 A1.19　每个局部自由层 $\mathscr{E}$ 都有唯一的一个 Harder 滤过。

证明　取 μ_1 为 $\mathscr{E}$ 的子层的斜率的极大值，并设 $\mathscr{E}_1$ 为斜率为 μ_1 的子层中秩极大的一个子层。然后再设 μ_2 为 $\mathscr{E}/\mathscr{E}_1$ 的子层的斜率的极大值，并设 $\mathscr{F}_2$ 为斜率为 μ_2 的 $\mathscr{E}/\mathscr{E}_1$ 的子层中，秩为极大的一个子层。设 $\mathscr{E}_2$ 为 $\mathscr{F}_2$ 在 $\mathscr{E}$ 中的原象。依次类推，我们就得到 $\mathscr{E}$ 的一个 Harder 滤过。

现在设

$$0=\mathscr{E}'_0\subsetneqq\mathscr{E}'_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}'_m=\mathscr{E}$$

为 $\mathscr{E}$ 的另一个 Harder 滤过。不妨假定 $\mu(\mathscr{E}_1)\geqslant\mu(\mathscr{E}'_1)$。存在 i 使得 $\mathscr{E}_1\subseteq\mathscr{E}'_i$，$\mathscr{E}_1\not\subseteq\mathscr{E}'_{i-1}$。于是我们有一个非零映射 $\mathscr{E}_1\longrightarrow\mathscr{E}'_i/\mathscr{E}'_{i-1}$，因此引理A1.11 给出 $\mu(\mathscr{E}'_i/\mathscr{E}'_{i-1})\geqslant\mu(\mathscr{E}_1)$，然后 Harder 滤过的定义给出 $i=1$，即 $\mathscr{E}_1\subseteq\mathscr{E}'_1$。交换 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}'_1$ 的位置，就得到 $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}'_1$。最后考虑两个滤过在 $\mathscr{E}/\mathscr{E}_1$ 中诱导的滤过，并依次类推，即得到 $\mathscr{E}_i=\mathscr{E}'_i$，$\forall i$。▮

定义 A1.20　设

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneqq\mathscr{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

为局部自由层 $\mathscr{E}$ 的 Harder 滤过。这个滤过的最后一级中间商层的斜率 $\mu(\mathscr{E}/\mathscr{E}_{n-1})$ 称为 $\mathscr{E}$ 的*最后斜率*，记作 $\mu_f(\mathscr{E})$。当 $\mathscr{E}$ 是半稳定层时，显然 $\mu_f(\mathscr{E})=\mu(\mathscr{E})$。

一个局部自由层 $\mathscr{E}$ 称为*正定的*（相应地，*半正定的*），如果 $\mu_f(\mathscr{E})>0$（相应地，$\mu_f(\mathscr{E})\geqslant0$）。

正定（相应地，半正定）的一个等价定义是 $\mathscr{E}$ 的任一商层的斜率 >0（相应地，$\geqslant0$）。这与把 $\mathscr{E}$ 看成向量丛时微分几何意义下正定和半正定的定义是一致的。

对应于（半）正定的是（半）负定的概念。$\mathscr{E}$ 称为*（半）负定的*，如果它的对偶层 $\mathscr{E}^\vee$ 是（半）正定的。一个局部自由层 $\mathscr{E}$ 是（半）负定的当且仅当 $\mathscr{E}$ 中没有次数 $\geqslant0$（>0）的子层。

命题 A1.21　1) 如果秩为 r 的局部自由层 $\mathscr{E}$ 有 r 个代数无关的整体截面 s_1，…，s_r，则 $\mathscr{E}$ 有一个完全滤过

$$F: 0=\mathscr{E}_0 \subsetneqq \mathscr{E}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathscr{E}_r=\mathscr{E},$$

其中所有的中间商层 $\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$ 的次数都是非负的。如果这些整体截面都是正次数的，则进一步地可有 $\deg(\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1})>0$，$\forall i$。

2）如果局部自由层 $\mathscr{E}$ 有一个滤过

$$F: 0=\mathscr{E}_0 \subsetneqq \mathscr{E}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

使得每个中间商层 $\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$ 都是(半)正定的，则 $\mathscr{E}$ 是(半)正定的。

证明　1）取 $\mathscr{E}_i$ 为截面 $s_1, \cdots, s_i$ 生成的饱和子层，并设 $\mathscr{F}^i$ 为 s_i 生成的可逆饱和子层。由代数无关性知 $\mathscr{F}_i$ 不含于 $\mathscr{E}_{i-1}$ 中，但 $\mathscr{F}_i$ 显然含于 $\mathscr{E}_i$ 中，所以有非零映射 $\varphi_i: \mathscr{F}_i \longrightarrow \mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$，由此得 $\deg(\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}) \geqslant \deg \mathscr{F}_i=\deg s_i$。

2）我们证明对偶命题：如果每个中间商层都是负定的，则 $\mathscr{E}$ 负定(半负定情形的证明完全相同)。

设 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{E}$ 的一个饱和子层。我们要证明 $\deg \mathscr{F}<0$。

设不然。则 F 诱导 $\mathscr{F}$ 的一个滤过

$$F_1: 0=\mathscr{F}_0 \subsetneqq \mathscr{F}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathscr{F}_m=\mathscr{F}.$$

我们只需取 $\mathscr{F}$ 和 F 中所有 $\mathscr{E}_i$ 的交，它们是 $\mathscr{F}$ 的饱和子层，然后把相同的项合并。对每个指标 i，存在一个指标 j，使得 $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{E}_j$，并且有单射 $\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i-1} \longrightarrow \mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1}$。由假设 $\deg \mathscr{F} \geqslant 0$，所以至少有一个 i 使得 $\deg(\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i-1}) \geqslant 0$，这与 $\mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1}$ 的负定性矛盾。∎

现在我们考虑基变换和局部自由层之间的关系。为此设 $\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$ 为一 d 次有限映射，$\mathscr{E}$ 是 C 上的一个局部自由层。则 $\mathscr{E}$ 在 π 下的拉回 $\tilde{\mathscr{E}}=\pi^* \mathscr{E}$ 是 $\tilde{C}$ 上的一个局部自由层，并且下面的性质是很容易证明的：

1）$\operatorname{rk}(\tilde{\mathscr{E}})=\operatorname{rk}(\mathscr{E})$，$\deg \tilde{\mathscr{E}}=d \cdot \deg \mathscr{E}$，$\mu(\tilde{\mathscr{E}})=d \cdot \mu(\mathscr{E})$。

2）如果 $0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}_2 \longrightarrow 0$ 是 C 上的一个正合列，则

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathscr{E}}_1 \longrightarrow \tilde{\mathscr{E}} \longrightarrow \tilde{\mathscr{E}}_2 \longrightarrow 0$$

是 $\tilde{C}$ 上的一个正合列，这里 $\tilde{\mathscr{E}}_i=\pi^* \mathscr{E}_i$。

3) $\mathscr{E}$ 的一个滤过

$$0=\mathscr{E}_0\subsetneq\mathscr{E}_1\subsetneq\cdots\subsetneq\mathscr{E}_n=\mathscr{E}$$

的拉回

$$0=\tilde{\mathscr{E}}_0\subsetneq\tilde{\mathscr{E}}_1\subsetneq\cdots\subsetneq\tilde{\mathscr{E}}_n=\tilde{\mathscr{E}}$$

也是 $\tilde{\mathscr{E}}$ 的一个滤过。

4) (半)正定和 (半) 负定的局部自由层在基变换下的拉回具有同样的性质。

5) 设 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}_n$ 是一个直和分解。则拉回 $\tilde{\mathscr{E}}$ 有直和分解 $\tilde{\mathscr{E}}=\tilde{\mathscr{E}}_1\oplus\cdots\oplus\tilde{\mathscr{E}}_n$。

注意不可分解层的拉回不一定不可分解。

定理 A1.22 设 $\mathscr{E}$ 为曲线 C 上的一个半稳定的局部自由层。$\mathscr{E}$ 在任一基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 下的拉回也是半稳定的。

证明 首先我们注意到，由于基变换和斜率的关系，一个非半稳定的局部自由层在基变换下的原象也是非半稳定的。因此我们不妨假定 π 是 Galois 映射，对应的 Galois 群为 G。G 是 $\mathscr{E}$ 的拉回 $\tilde{\mathscr{E}}$ 上的一个自同构群，使得 $\mathscr{E}=\tilde{\mathscr{E}}/G$。

假设 $\tilde{\mathscr{E}}$ 不是半稳定的，并设 $\tilde{\mathscr{F}}$ 为 $\tilde{\mathscr{E}}$ 的 Harder 滤过中的第一个子层。则 $\mu(\tilde{\mathscr{F}})>\mu(\tilde{\mathscr{E}})$，$\tilde{\mathscr{F}}$ 是半稳定的。由于 Harder 滤过的唯一性，$\tilde{\mathscr{F}}$ 是 G 的一个不变子层。但这样 $\tilde{\mathscr{F}}$ 在 $\mathscr{E}$ 中的象就是同构于 $\tilde{\mathscr{F}}/G$ 的一个子层 $\mathscr{F}$，满足 $\mathrm{rk}(\mathscr{F})=\mathrm{rk}(\tilde{\mathscr{F}})$，$\mu(\mathscr{F})=\dfrac{\mu(\tilde{\mathscr{F}})}{\deg\pi}>\mu(\mathscr{E})$，与 $\mathscr{E}$ 的半稳定性矛盾。▮

推论 1 一个局部自由层的 Harder 滤过在基变换下的拉回也是 Harder 滤过。

推论 2 设 $\tilde{\mathscr{E}}$ 为 $\mathscr{E}$ 在基变换 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 下的拉回。则 $\tilde{\mathscr{E}}$ 是(半)正定的当且仅当 $\mathscr{E}$(半)正定。

注意，定理 A1.22 中的条件换成稳定时，拉回层不一定是稳定的。

§ A2 模簇和模形式

我们先来看看一维的情形。设

$$\mathscr{H}=\{z\in\mathbf{C}\mid\operatorname{Im}(z)>0\}$$

为复平面的上半平面，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $ad-bc=1$ 为 $SL(2,\mathbf{Z})$ 中的一元。则 A 诱导$\mathscr{H}$的一个解析变换

$$A:\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{H},$$

它由

$$Az=\frac{az+b}{cz+d}$$

定义。这种变换的复合与 $SL(2,\mathbf{Z})$ 中的乘法是相容的，所以它定义了 $SL(2,\mathbf{Z})$ 在$\mathscr{H}$上的一个作用，这个作用的核是 $\pm I$。设 C_1' 为商空间 $\mathscr{H}/SL(2,\mathbf{Z})$。$C_1'$ 是一个黎曼曲面，但不是紧致的。

为了将 C_1' 紧致化，我们考虑 $\overline{\mathscr{H}}=\mathscr{H}\cup\{\infty\}\cup\mathbf{Q}$。$SL(2,\mathbf{Z})$ 在$\mathscr{H}$上的作用可以自然地拓展到$\overline{\mathscr{H}}$上，$\overline{\mathscr{H}}$的子集 $\{\infty\}\cup\mathbf{Q}$ 在这个作用下是可迁的。如果我们把 $V_N=\{z\in\mathscr{H}\mid\operatorname{Im}(z)>N\}$ $(N\gg 0)$ 定义为 ∞ 的邻域系并把 V_N 在 $SL(2,\mathbf{Z})$ 作用下的象作为相应的点 $p\in\mathbf{Q}$ 的邻域，就给$\overline{\mathscr{H}}$赋予一个流形结构，使得它在 $SL(2,\mathbf{Z})$ 下的商 C_1 是一个紧致黎曼曲面，即一条代数曲线。事实上，很容易看出 C_1 的拓扑基底是一个球面，所以 $C_1\cong\mathbf{P}^1$。C_1 就是关于 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的**模曲线**，而 $SL(2,\mathbf{Z})$ 称为**椭圆模群**。

$\overline{\mathscr{H}}-\mathscr{H}$中的点（或它们在 C_1 中的象）称为**尖点**。

模群和模曲线与椭圆曲线的模空间有着密切的关系。设 E 为一条椭圆曲线，

$$V=H^1(E,\mathbf{C}),\ U=H^1(E,\mathbf{Z}).$$

则 U 是 $V\cong\mathbf{C}$ 中的一个格（即 V 的一个离散子群使得 $V=U\times_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$），使得 $E\cong V/U$。同时，对于 V 中的任意一个格 U'，$E\cong V/U'$ 当且仅当存在一个常数 $x\in\mathbf{C}$，使得 $U'=xU$。

现在设(z_1, z_2)为U的一组基。在乘了一个常数以后，我们可以设$z_2=1$, $z_1=z\in\mathscr{H}$。在这个意义下，$\mathscr{H}$中的每个点z都唯一地对应了一条椭圆曲线$E=E_z$。我们来看何时$\mathscr{H}$中的两个不同的点对应的椭圆曲线是同构的。

设$z'\in\mathscr{H}$使$E_{z'}\cong E_z$，并设U_z和$U_{z'}$分别为$(z, 1)$和$(z', 1)$生成的格。则有$x\in\mathbf{C}$，使$xU_{z'}=U_z$，从而有$a, b, c, d\in\mathbf{Z}$使$xz'=az+b\cdot 1$, $x\cdot 1=cz+d\cdot 1$，或$z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$。因为(xz', x)也是U_z的基，且xz'/x和z同在上半平面中，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2, \mathbf{Z})$。

反之，若$z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2, \mathbf{Z})$，则$U_z=(cz+d)U_{z'}$，所以$E_{z'}\cong E_z$。即$E_{z'}\cong E_z$当且仅当$z$和$z'$在$SL(2, \mathbf{Z})$的同一个轨道中，因此$C_1'$在这个意义下是椭圆曲线的模空间$\mathscr{M}_1$，而$C_1$是$\mathscr{M}_1$的自然紧致化。

定义 A2.1 设$N\geqslant 1$为任一整数，则

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2, \mathbf{Z}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\equiv I \pmod{N}\right\}$$

是$SL(2, \mathbf{Z})$的一个正规子群，称为级N的主同余子群。当$N\geqslant 3$时，$\Gamma(N)$不含$-I$，所以它在$\overline{\mathscr{H}}$上的作用是忠实的。对所有N，商空间$C_N=\overline{\mathscr{H}}/\Gamma(N)$是一条代数曲线，称为级$N$的主模曲线。$\Gamma(N)$在$SL(2, \mathbf{Z})$中的嵌入自然地诱导一个 Galois 覆盖。

$$\gamma_N: C_N\longrightarrow C_1.$$

一般地，若Γ是$SL(2, \mathbf{Z})$中包含某个$\Gamma(N)$的子群，则它称为$SL(2, \mathbf{Z})$的一个同余子群，商空间$C_\Gamma=\overline{\mathscr{H}}/\Gamma$称为它的模曲线。

为了研究$\Gamma(N)$与椭圆曲线的模空间的关系，有下面的定义。

定义 A2.2 设$N\geqslant 1$为一整数。一条级N的椭圆曲线是指一个对(E, α)，其中E是一条椭圆曲线，α是E中所有阶为N的元构成的子群E_N到$\mathbf{Z}_N^2$的一个同构映射

$$\alpha: E_N\longrightarrow \mathbf{Z}_N^2.$$

两个级N的椭圆曲线(E_1, α_1)和(E_2, α_2)之间的一个同构$\Phi:(E_1, \alpha_1)\longrightarrow(E_2, \alpha_2)$是指一个同构$\varphi:E_1\longrightarrow E_2$，它使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} E_{1,N} & \xrightarrow{\varphi} & E_{2,N} \\ & {\scriptstyle\alpha_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\alpha_2} & \\ & \mathbf{Z}_N^2 & \end{array}$$

我们来考虑级N的椭圆曲线的模空间$\mathscr{M}_{1,N}$。

对于任一个$z\in\mathscr{H}$，我们可构造一个级N的椭圆曲线(E_z, α_z)如下：设$E_z=\mathbf{C}/U_z$，则$E_{z,N}$中的任一元p可以唯一地表成$\mathscr{H}$中的一个元$h_p=\dfrac{az+b}{N}$，其中$a, b\in\mathbf{Z}$，使得$0\leqslant a, b<N$。我们定义

$$\alpha_z(p)=(a, b).$$

设$z'\in\mathscr{H}$使得$(E_z, \alpha_z)\sim(E_{z'}, \alpha_{z'})$。则$E_z\sim E_{z'}$，故有$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2, \mathbf{Z})$使$z'=Az$。这里的同构$\varphi:E_{z'}\longrightarrow E_z$由$\tilde{\varphi}:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$，$\tilde{\varphi}(x)=(cz+d)x$诱导，而$\alpha_{z'}=\alpha_z\circ\varphi$当且仅当$\tilde{\varphi}(z'/N)$和$\tilde{\varphi}(1/N)$分别与$z/N$和$1/N$模$U_z$同余，或

$$cz+d\equiv 1(\bmod\ NU_z),\ az+b\equiv z(\bmod\ NU_z).$$

这个条件显然等价于$A\in\Gamma(N)$，所以有下述定理：

定理 A2.3 C_N是级N的椭圆曲线的模空间$\mathscr{M}_{1,N}$的自然紧致化。

现在来计算C_N的不变量。以后我们设$N\geqslant 2$，并记

$$\Delta_N=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{如果 } N=2; \\ \dfrac{1}{24}N^2\displaystyle\prod_{\substack{p\mid N \\ p\text{素数}}}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right), & \text{如果 } N>2. \end{cases} \tag{A1}$$

引理 A2.4 设d_N为γ_N的次数，则$d_N=12N\Delta_N$。

证明 当$N=2$时，$\Gamma(2)$包含$-I$，所以$d_2=[SL(2, \mathbf{Z}):\Gamma(2)]$，而直接验算可知下列元素代表了$SL(2, \mathbf{Z})/\Gamma(2)$的所有旁集，因此$d_2=6$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $N>2$ 时，$\Gamma(N)$ 不含 $-I$，所以

$$d_N = \frac{1}{2}[SL(2, \mathbf{Z}) : \Gamma(N)]. \tag{A2}$$

故我们只要证明

$$\# SL(2, \mathbf{Z}_N) = [SL(2, \mathbf{Z}) : \Gamma(N)] = 24N\Delta_N \tag{A3}$$

对 $N \geqslant 3$ 成立。

当 $N=p$ 为素数时，设 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}_p)$。若 $a \neq 0$，则当 b 和 c 选定后 d 唯一确定，所以这样的矩阵共有 $p^2(p-1)$ 个；若 $a=0$，则 $d \in \mathbf{Z}_p$ 可任取，而当 $b \neq 0$ 选定后，c 唯一确定，这样的矩阵共有 $p(p-1)$ 个。两者相加即得(A3)。

设 $N=p^n$，其中 p 为素数，$n \geqslant 2$。这时可对 n 归纳，因为直接计算可得

$$[(SL(2, \mathbf{Z}_{p^{n-1}}) : SL(2, \mathbf{Z}_{p^n})] = p^3.$$

一般地，若 $N = N_1 \cdots N_k$，其中 $N_i = p_i^{n_i}$ 为素数幂，则由孙子定理可得

$$\# SL(2, \mathbf{Z}_N) = \# SL(2, \mathbf{Z}_{N_1}) \cdots \# SL(2, \mathbf{Z}_{N_k}),$$

故有(A3)。 ▮

为了应用 Riemann-Hurwitz 公式计算 C_N 的亏格，我们还需要确定 γ_N 的分歧指数。注意，当 $N \geqslant 2$ 时，$\Gamma(N)$ 在 $\mathscr{H}$ 上的作用是自由的，而 $SL(2, \mathbf{Z})$ 在 $\mathscr{H}$ 的两个点上不是自由的：$i=\sqrt{-1}$ 和 $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$，其安定子群分别为 2 阶与 3 阶。因此在这两个点(在 C_1 中的象)上 γ_N 的分歧指数分别为 $\frac{1}{2} d_N$ 与 $\frac{2}{3} d_N$。

剩下的就是 γ_N 在尖点上的分歧指数，它等于 $d_N - t_N$，这里 t_N 为 C_N 中尖点的个数。

引理 A2.5 $t_2 = 3$，而当 $N \geqslant 3$ 时，$t_N = 12\Delta_N$。

证明 $t_2 = 3$ 可以直接通过计算求出 (3 个点分别为 $0, 1, \infty$

的象)，所以我们设 $N\geqslant 3$. 设 G_∞ 为 $SL(2,\mathbf{Z})$ 中 ∞ 的安定子群，则

$$\begin{aligned} t_N &= [SL(2,\mathbf{Z}):G_\infty+\Gamma(N)] \\ &= [SL(2,\mathbf{Z}):\Gamma(N)]/[G_\infty+\Gamma(N):\Gamma(N)] \\ &= [SL(2,\mathbf{Z}):\Gamma(N)]/[G_\infty:G_\infty\cap\Gamma(N)]. \end{aligned}$$

现在

$$G_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big| b\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Big| b\in\mathbf{Z}\right\},$$

而

$$G_\infty\cap\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big| b\in N\mathbf{Z}\right\},$$

故

$$[G_\infty:G_\infty\cap\Gamma(N)]=2N,$$

引理根据公式(A2)成立。 ▮

由 Riemann-Hurwitz 公式给出以下定理：

定理 A2.6 $g(C_N)-1=-d_N+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d_N+\frac{2}{3}d_N+(d_N-t_N)\right)$ $=(N-6)\Delta_N$.

定义 A2.7 设 k 为一整数，Γ 为 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的一个同余子群，$f(z)$ 为 $\mathscr{H}$ 上的一个半纯函数。如果对任意 $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$，有

$$f(\gamma z)=(cz+d)^k f(z),$$

且 f 在 $\overline{\mathscr{H}}$ 的任意尖点 p 处也是半纯的 (若 $p=\infty$ 为无穷远点，则设 $q=e^{2\pi iz}$，f 关于 q 的 Fourier 展开 $f(z)=\Sigma_n a_n q^n$ 中只有有限多个 $n<0$ 使得 $a_n\neq 0$；若 $p\in\mathbf{Q}$ 为其他尖点，则可用 $SL(2,\mathbf{Z})$ 中的某个元将 ∞ 的条件化到 p 上)，则 f 称为关于 Γ 的权 k 模函数。如果 f 还是全纯的且在 $\overline{\mathscr{H}}$ 的所有尖点处也全纯，则称为关于 Γ 的权 k 模形式。

模函数和模形式有十分有趣的几何意义。Γ 在 $\mathscr{H}$ 上的作用可以推广到 $\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ 上，设 $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$，则定义 $\gamma(z,t)=\Big(\gamma z,$

$\left.\frac{t}{cz+d}\right)$. γ 把 $z\times\mathbf{C}$ 线性地映到 $\gamma z\times\mathbf{C}$.

$\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ 可以看成$\mathscr{H}$上的一个群层，它有一个离散子群层 $\mathscr{U}$，使得在每个 $z\in\mathscr{H}$ 上，$\mathscr{U}|_z=U_z$。于是上面定义的 Γ 在 $\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ 上的作用就是保持$\mathscr{U}$不变的作用。

如果 Γ 在$\mathscr{H}$上的作用是自由的，则 $\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ 在 Γ 下的商是 C'_Γ 上的一个线丛 $\mathscr{E}'$，这里 C'_Γ 为$\mathscr{H}$在 Γ 下的商。如果进一步地 Γ在尖点上的作用是半单的，则 $\mathscr{E}'$ 可以自然地拓展到 $\overline{\mathscr{H}}/\Gamma=C_\Gamma$ 上的一个线丛 $\mathscr{E}$，而$\mathscr{U}$的象为 $\mathscr{E}$ 中的一个离散子群层 U，使 $\mathscr{E}/U$ 成为 C_Γ 上的一个李群层。设 s 为 $\mathscr{E}$ 的一个截面。则 s 在 $\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ 上的原象由第二投影定义了$\mathscr{H}$到 $\mathbf{C}+\{\infty\}$ 的一个映射，即$\mathscr{H}$上的一个函数，它正好是关于 Γ 的一个权为 -1 的模函数。如果 s 是 $\mathscr{E}$ 的整体截面，则它对应的是$\mathscr{H}$上的模形式。更一般地，关于 Γ 的一个权为 k 的模函数(模形式)就等于 $\mathscr{E}^{\otimes-k}$ 的一个截面(整体截面)的原象。

设 f 为一模函数。为了简单起见，我们假定 f 在尖点和 Γ 的不动点上没有零点或极点。这时我们定义 f 的次数为它在 Γ 的一个基本区域上的零点个数减极点个数(均计重数)。显然关于同一个群的权相同的模函数的次数是相同的。如果 Γ 满足上一段的条件，则权为 k 的模函数的次数等于 $\mathscr{E}^{\otimes-k}$ 在 C_Γ 上的次数。

我们感兴趣的是 $\Gamma(N)$ $(N\geqslant3)$ 的模函数的次数。这些同余子群满足上面的条件。为了计算这些次数，注意，关于 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的一个权 k 模函数也是关于任一同余子群的权 k 模函数，而我们知道当 k 是偶数时，存在关于 $SL(2,\mathbf{Z})$的非零权 k 模函数。设 f 是这样一个模函数。则 f 关于 $\Gamma(N)$的次数等于它关于$SL(2,\mathbf{Z})$的次数乘以 C_N 在 C_1 上的次数。另一方面，对 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的一个标准基本区域计算围道积分，可以算出关于 $SL(2,\mathbf{Z})$的权 k 模函数的次数是$\frac{k}{12}$(例如参见[Shim]的第二章)。因此有：

引理 A2.8 设 f 为关于 $\Gamma(N)$ $(N\geqslant3)$ 的一个权 k 模函数。

则

$$\deg f=\frac{d_J k}{12}=kN\Delta_N。$$

上面的理论可以推广到高维的情形：对于任一 $g\geqslant 1$，定义 g 维的广义 Siegel 上半平面 $\mathscr{H}_g$ 为所有虚部为正定的 $g\times g$ 对称复矩阵的全体组成的集合，以及 Siegel 模群 $\Gamma_g=Sp(2g,\mathbf{Z})/\pm I_{2g}$。对于任一 $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in Sp(2g,\mathbf{Z})$ 以及 $Z\in\mathscr{H}_g$，这里 A、B、C、D 为 $g\times g$ 整矩阵，定义

$$T(Z)=\frac{AZ+B}{CZ+D},$$

则 $T(Z)$ 也是 $\mathscr{H}_g$ 中的元素，所以这给出了 Γ_g 在 $\mathscr{H}_g$ 上的一个作用。以 $\mathscr{A}_g$ 记在这个作用下的商空间 $\mathscr{H}_g/\Gamma_g$。则有以下定理：

定理 A2.9　$\mathscr{A}_g$ 自然地成为 g 维主极化阿贝尔簇的模空间。(关于阿贝尔簇的基本性质，读者可以参看[Mu3]和[GH]的第2章第6节。)

证明　对于任一 $Z=(z_{ij})\in\mathscr{H}_g$，设 $u_1,\cdots,u_g$ 为 $V=\mathbf{C}^g$ 的一组 $\mathbf{C}$-基，$u_{g+i}=\sum_{j=1}^{g}z_{ij}u_j(i=1,\cdots,g)$，则 $u_1,\cdots,u_{2g}$ 生成 V 中一个格 U，使得 $X_Z=V/U_Z$ 成为一个复环面(complex torus)。我们还可以定义一个么模反对称二次形式 $E:U_Z\times U_Z\longrightarrow\mathbf{Z}$，通过

$$-E(u_{g+i},u_i)=E(u_i,u_{g+i})=1,\ i=1,\cdots,g;$$

$$E(u_i,u_j)=0,\quad 若\ |j-i|\neq g。$$

E 可以唯一地拓展到 $V\times V$ 上的一个非退化反对称实二次形式，仍记作 E。由 Z 的对称性可以推出对任意的 $x,y\in V$，$E(\sqrt{-1}x,\sqrt{-1}y)=E(x,y)$，且由 Z 的虚部的正定性，$E(\sqrt{-1}x,x)>0$。因此 E 对应于 X_Z 上的一个主极化，特别地 X_Z 是阿贝尔簇。反之，设 X 为一主极化阿贝尔簇，$V=H^1(X,\mathbf{C})$ 为 X 的泛覆盖空间，$U=H^1(X,\mathbf{Z})$ 为 V 中的格，使得 $X=V/U$。对应于 X 的主极化有一个 V 上的反对称实二次形式 E，它限制在 U 上是一个么模整形式，因此，我们可以选取 U 的一组基 $\{u_1,\cdots,u_{2g}\}$，使得 E 关于这

组基的矩阵为形如$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$。由 Riemann 双线性关系可以得到

$$E(\sqrt{-1}x, \sqrt{-1}y) = E(x, y), \quad E(\sqrt{-1}x, x) > 0, \quad \forall x, y \in V.$$

故 $\{u_1, \cdots, u_g\}$ 构成V在$\mathbf{C}$上的一组基。将 $u_{g+1}, \cdots, u_{2g}$ 用这组基来表示，我们就得到一个 $g\times g$ 的复矩阵 Z，并且上面的 Riemann 双线性关系说明Z是对称的，且其虚部正定。于是$Z\in\mathscr{H}_g$。这样我们就得到了 $\mathscr{H}_g$ 到 g 维主极化阿贝尔簇的模空间的一个满射同态。

最后，设Z和 Z' 为 $\mathscr{H}_g$ 中的两个元素，使得 X_Z 和 $X_{Z'}$ 作为主极化阿贝尔簇是同构的。这个同构诱导一个同构 $\theta: U_Z \longrightarrow U_{Z'}$，因此在$U_Z$ 和 $U_{Z'}$ 的上述标准基$\{u_1, \cdots, u_{2g}\}$和$\{u'_1, \cdots, u'_{2g}\}$下，设$U_1, U_2, U'_1, U'_2$ 分别为 $(u_1, \cdots, u_g)$, $(u_{g+1}, \cdots, u_{2g})$, $(u'_1, \cdots, u'_g)$, $(u'_{g+1}, \cdots, u'_{2g})$，有 $g\times g$ 整矩阵 A, B, C, D，使得

$$U_1'^t = C\theta(U_2)^t + D\theta(U_1)^t, \quad U_2'^t = A\theta(U_2)^t + B\theta(U_1)^t,$$

或者说 $Z' = \dfrac{AZ+B}{CZ+D}$。设 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，则$T$把基$(\theta(U_2), \theta(U_1))$变到$(U'_2, U'_1)$，且反对称形式$E$在这两组基下的表示矩阵不变，因此 $T\in Sp(2g, \mathbf{Z})$。反之，逆向的推理说明对于 $T\in Sp(2g, \mathbf{Z})$ 和 $Z\in\mathscr{H}_g$，X_Z 和 $X_{T(Z)}$是同构的主极化阿贝尔簇。 ∎

模空间 $\mathscr{A}_g$ 对任意的 g 都不是紧致的。对我们来说，最有用的是 $\mathscr{A}_g$ 的佐武(Satake)紧致化[BB]，它是一个正规射影簇 $\bar{\mathscr{A}}_g$，并且有一个由子簇组成的层化

$$\bar{\mathscr{A}}_g = \mathscr{A}_g \cup \mathscr{A}_{g-1} \cup \cdots \cup \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_0,$$

这里 $\mathscr{A}_0$ 是一个点。$\bar{\mathscr{A}}_g$ 中的子簇 $\mathscr{A}_{g-1} \cup \cdots \cup \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_0$ 可以看成一维情形的尖点在高维的推广。

定义 A2.10 设m为一正整数。$\mathscr{H}_g$ 上的一个半纯(全纯)函数 φ 称为一个权为 m 的模函数(模形式)，如果对所有 $Z\in\mathscr{H}_g$ 和 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in Sp(2g, \mathbf{Z})$，

$$\varphi\left(\frac{AZ+B}{CZ+D}\right)=\det(CZ+D)^m\cdot\varphi(Z).$$

(在 $g=1$ 以及模形式时,进一步要求当 $\mathrm{Im}(Z)\to\infty$ 时,φ 是有界的。)

$\mathscr{H}_g$ 上关于所有权的模形式构成一个有限生成的分次环,这个分次环的射影谱即为 Satake 紧致化 $\bar{\mathscr{A}}_g$[BB]。特别地,$\bar{\mathscr{A}}_g$ 上有一个充分丰富的可逆层 $\mathscr{O}(1)$,它的截面对应于关于某个权 m 的模形式。

最后,设 $\mathscr{M}_g$ 为亏格 g 的代数曲线的模空间。把一条曲线对应于其雅可比簇,就得到 $\mathscr{M}_g$ 到 $\bar{\mathscr{A}}_g$ 的一个态射。Torelli 定理说明这个态射是一个嵌入。设 $\bar{\mathscr{M}}_g$ 为 $\mathscr{M}_g$ 的象在 $\bar{\mathscr{A}}_g$ 中的闭包。则 $\bar{\mathscr{M}}_g$ 是 $\mathscr{M}_g$ 的一个紧致化,也称为 $\mathscr{M}_g$ 的佐武紧致化。

$\bar{\mathscr{A}}_g$ 的层化 $\mathscr{A}_g\cup\mathscr{A}_{g-1}\cup\cdots\cup\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_0$ 诱导 $\bar{\mathscr{M}}_g$ 的一个层化

$$\bar{\mathscr{M}}_g=\mathscr{M}_g\cup\mathscr{M}'_g\cup\mathscr{M}'_{g-1}\cup\cdots\cup\mathscr{M}'_1\cup\mathscr{M}'_0,$$

其中 $\mathscr{M}'_g$ 为 $\bar{\mathscr{M}}_g-\mathscr{M}_g$ 与 $\mathscr{A}_g$ 的交,$\mathscr{M}'_r=\mathscr{A}_r\cap\bar{\mathscr{M}}_g$。对于 $r<g$,$\mathscr{M}'_r\cup\cdots\cup\mathscr{M}'_0=\bar{\mathscr{M}}_r$,而 $\mathscr{M}'_g$ 为 $\mathscr{A}_g$ 中对应于所有可以分解为若干条曲线的雅可比簇的直和的阿贝尔簇的点全体。特别地,当 $g\geqslant 2$ 时,有 $\dim(\bar{\mathscr{M}}_g-\mathscr{M}_g)=\dim(\mathscr{M}_{g-1})+\dim(\mathscr{M}_1)$。

$\mathscr{M}_g$ 有另一个紧致化:Mumford 的稳定曲线的模空间 $\tilde{\mathscr{M}}_g$。$\tilde{\mathscr{M}}_g$ 到佐武的紧致化 $\bar{\mathscr{M}}_g$ 有一个典范的双有理态射,它把所有具有相同的雅可比簇的曲线所对应的点映到同一个点。

§ A3 代数曲线的基本群

为了研究纤维化曲面的基本群,我们将要用到代数曲线的基本群的一些基本性质。

首先,设 C 为一亏格 g 的曲线,$p_1,\cdots,p_n$ 为 C 上的 n 个点,$C'=C-\{p_1,\cdots,p_n\}$。则存在 C 上的 $2g$ 个环路 $\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g$ 以及环绕 $p_1,\cdots,p_n$ 的 n 个小环路 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$,使得它们的类

$$[\alpha_1], \cdots, [\alpha_g], [\beta_1], \cdots, [\beta_g], [\gamma_1], \cdots, [\gamma_n]$$

生成 $\pi_1(C')$，并且满足唯一的定义关系

$$[\alpha_1][\beta_1][\alpha_1]^{-1}[\beta_1]^{-1}\cdots[\alpha_g][\beta_g][\alpha_g]^{-1}[\beta_g]^{-1}[\gamma_1]\cdots[\gamma_n].$$

定理 A3.1 若 $\pi:\tilde{C}\longrightarrow C$ 为有限覆盖，则 π 诱导的同态 $\pi_1(\tilde{C})\longrightarrow\pi_1(C)$ 的象在 $\pi_1(C)$ 中指标有限，其指标为 $d=\deg\pi$ 的一个因子。

证明 用 $\tilde{C}$ 中满足 $\pi(\gamma)$ 同伦等价于零的道路 γ 定义 $\tilde{C}$ 中的等价关系，设 C_1 为商。则 π 通过

$$\tilde{C}\xrightarrow{\pi'}C_1\xrightarrow{\pi''}C$$

分解。现在 π' 诱导 $\pi_1(\tilde{C})$ 到 $\pi_1(C_1)$ 的满射同态，而 π'' 是平展的。 ∎

定理 A3.2 设 C 为一条代数曲线，Σ 为 C 中的一个有限子集，$C'=C-\Sigma$，n 为一正整数。则 C 只有有限多个不同构的在 C' 上平展的 n 次有限覆盖。

证明 如果 C 有两个 n 次有限覆盖 $\varphi_1:C_1\longrightarrow C$ 和 $\varphi_2:C_2\longrightarrow C$，它们在 C' 上相同，则 C_1 和 C_2 双有理等价，因此同构。所以我们只要证明 C' 只有有限多个 n 次平展覆盖，或者说 $\pi_1(C')$ 只有有限多个指标为 n 的子群。但因为 $\pi_1(C')$ 是有限生成的，这是下面这个纯群论引理的直接推论。

引理 A3.3 设 G 为一有限生成群，n 为一正整数。则 G 中指标为 n 的子群个数有限。

证明 可设 G 为自由群，生成元集为 $\{a_1, \cdots, a_k\}$。于是 G 中的每个元 x 都可以唯一地写成 a_i 和 a_i^{-1} 的一个"词"。定义 x 的长度为词中 a_i 和 a_i^{-1} 的个数。

对 G 的任一满足 $[G:H]=n$ 的子群 H，我们可以在 H 的每个左旁集 xH 中选取代表元 x 使得其长度最短。

引理 A3.4 x 的长度不超过 n。

证明 设 $x=c_1\cdots c_m$，$m>n$，其中 c_i 为 G 的生成元或其逆。设 $x_i=c_i\cdots c_m$，$(i=1,\cdots,m)$ 为 x 的截段。于是必有两个截段，设

为 x_i 和 x_j，$i<j$，属于同一个旁集，换句话说 $x_i=x_jh$，$h\in H$。于是 $x=c_1\cdots c_{i-1}c_i\cdots c_m=c_1\cdots c_{i-1}c_j\cdots c_mh$，或 $x'=c_1\cdots c_{i-1}c_j\cdots c_m$ 也是这个旁集的代表元，与 x 的长度最短性矛盾。 ▮

因为 G 中长度有界的元素只有有限多个，H 的上述满足长度最短性的旁集代表元的集合的可能性也只有有限多种。于是只需证明具有相同的旁集代表元集的子群只有有限多个。

设 $\{x_1=1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 H 的一个旁集代表元集。对于每个 x_i 和 G 的每个生成元 a_m，存在 $j=j(i, m)$、$j'=j'(i, m)$，使得 $a_mx_i\in x_jH$，$a_m^{-1}x_i\in x_{j'}H$。函数

$$j, j':\{1, \cdots, n\}\times\{1, \cdots, k\}\longrightarrow\{1, \cdots, n\}$$

由 H 所决定，并且只有有限多种可能性。现在证明子群 H 由旁集代表元集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 和函数 j、j' 所唯一确定。

事实上，对上述每一整数对 (i, m)，有 $x_j^{-1}a_mx_i\in H$，$x_{j'}^{-1}a_m^{-1}x_i\in H$。设 H' 为具有所有这样的元素 $x_j^{-1}a_mx_i$、$x_{j'}^{-1}a_m^{-1}x_i$ 生成的子群，则 $H'\subset H$。我们只要证明 H' 在 G 中的指标为 n，就说明了 $H'=H$，定理得证。

为此设 $y=c_1\cdots c_l$ 为 G 中任一元，其中 c_i 为生成元或其逆。我们证明存在一个 j 使得 $y\in x_jH'$。对 y 的长度归纳之，设 $y'=c_2\cdots c_l$，于是 $y=c_1y'$。由归纳法假设，存在 i 使 $y'=x_ih'$，$h'\in H'$。不妨设 $c_1=a_m$，并设 $j=j(i, m)$。于是

$$y=c_1x_ih'=x_j[(x_j^{-1}c_1x_i)h']\in x_jH'. \quad ▮$$

定义 A3.5 设 $\pi:C\longrightarrow D$ 为光滑射影曲线间的一个满态射。π 称为一致分歧的，如果对 D 中的任一点 p，π 在 p 的每个原象点上的分歧指数都相同。

定理 A3.6 设 $\pi:C\cong\mathbf{P}^1\longrightarrow D\cong\mathbf{P}^1$ 为一 d 次态射。则 π 为 Galois 态射当且仅当它是一致分歧的。

证明 条件的必要性是显而易见的。反之，设 k 为 π 的分枝点个数。注意 $k\geqslant2$，且由 Hurwitz 公式，$k\leqslant3$，而当 $k=2$ 时，π 在分枝点上必须有完全分歧，所以它是对应于 C 的 d 阶循环自同构群的 Galois 映射。

因此设 $k=3$，并设 x_1、x_2、x_3 为分枝点，$r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$ 为 π 在它们的原象上的分歧指数，$D'=D-x_1-x_2-x_3$，$C'=\pi^{-1}(D')$，π': $C'\longrightarrow D'$ 为限制映射。则 π' 是平展的，所以它对应于 $\pi_1(D')$ 中的一个指标为 d 的子群 G。同样由 Hurwitz 公式，(r_1, r_2, r_3, d) 只有下列可能的组合：

$(2, 2, n\geqslant 2, 2n)$，$(2, 3, 3, 12)$，$(2, 3, 4, 24)$，$(2, 3, 5, 60)$。

取 D' 中绕 x_1，x_2，x_3 的三个小环路 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$，则 $\pi_1(D')$ 由它们生成，并满足关系 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3=1$。由一致分歧性，对任一 i 和 $\pi_1(D')$ 中共轭于 γ_i 的任一元素 γ，γ^{r_i} 在子群 G 中。因此 G 包含由 $\gamma_1^{r_1}$，$\gamma_2^{r_2}$，$\gamma_3^{r_3}$ 生成的正规子群 N，然而不难看出 $\pi_1(D')/N$ 同构于上述组合所对应的多面体群，因此 $[\pi_1(D'):N]=[\pi_1(D'):G]$，于是 $G=N$ 为 $\pi_1(D')$ 的正规子群。 ▌

参 考 文 献

[Ara] Arakelov, S. Ju.: Families of algebraic curves with fixed degeneracy, Math. USSR Izvestija 5/6(1971).

[AW] Artin, M./Winters, G.: Degenerate fibres and stable reduction of curves, Topology 10, 373-383(1971).

[At] Atiyah, M. F.: Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc. 7, 414-452 (1957).

[BB] Baily, W. L. Jr. / Borel, A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. Math. 84, 422-528 (1966).

[BPV] Barth, W. / Peters, C. / Van de Ven, A.: Compact Complex Surfaces, Springer-Verlag 1984.

[B1] Beauville, Arnaud: Surfaces Algébriques Complexes, Astérisque 54, Soc. Math. France, 1978.

[B2] Beauville, Arnaud: L' application canonique pour les surfaces de type général, Inv. Math. 55, 121-140 (1979).

[B3] Beauville, Arnaud: Sur le nombre de points doubles d'une surface dans P^3 ($\mu(5)=31$), in Algebraic Geometry Anger 1979, ed. A Beauville, 207-216, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[B4] Beauville, Arnaud: Le nombre minimum de fibres singulières d' une courbe stable sur P^1, in Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, ed. Lucien Szpiro, Astérisque 86, 97-108 (1981).

[B5] Beauville, Arnaud: L'inégalité $p_g \geqslant 2q-4$ pour les surfaces de type général, Appendice à O. Debarre: Inégalités numériques pour les surfaces de type général, Bull. Soc. Math. France 110/3, 319-346 (1982).

[B6] Beauville, Arnaud: Les familles stables de courbes elliptiques sur P^1 admettant 4 fibres Singulières, preprint 1986.

[B0] Bombieri, Enrico: Canonical models of surfaces of general type, Publ. IHES 42, 171-219(1973).

[Cat] Catanese, Fabricio: Canonical rings and "special" surfaces of general type, in Algebraic Geometry Bowdoin 1985 vol. I, 175-194, AMS 1987.

[Ch1] Chen, Zhijie(陈志杰): On the geography of surfaces——simply connected minimal surfaces with positive index, Math. Ann. 277, 141-164, (1987).

[Ch2] Chen, Zhijie: On the slope of non-hyperelliptic fibrations. of genus4.(toappear).

[Ch3] Chen, Zhijie: The existence of surfaces of general type with preassigned Chern numbers. Math. Z.206, 241—254(1991).

[CH] Cornalba, M. / Harris, J.: Divisor classes associated to families of stable varieties, with applications to the moduli space of curves, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 21/3, 455-475 (1988).

[De1] Debarre, Olivier. Inégalités numériques pour les surfaces de typ général, Bull. Soc. Math. France 110/3, 319-346 (1982).

[De2] Debarre, Olivier: Addendum, Bull. Soc. Math. France 111/4, 301-302 (1983).

[DM] Deligne, Pierre / Mumford, David: The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. IHES 36, 75-109 (1969).

[Des] Deschamps, Mireille: Réduction semi-stable, in Séminaire sur les Pinceaux de Courbes de Genre au moins Deux, Astérisque 86, 1-34, 1981.

[Di] Dicks, D.: Birational pairs according to S. Iitaka, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 102, 59-69 (1987).

[Do1] Dolgachev, Igor : On rational surfaces with a pencil of elliptic curves, Izv. Akad. Nauk SSSR (ser. math.) 30, 1073-1100 (1966) (in Russian).

[Do2] Dolgachev, Igor: On Severi's conjecture on simply connected algebraic surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 170, 249-252 (1966).

[Do3] Dolgachev, Igor: Algebraic surfaces with $q = p_g = 0$, in Algebraic Surfaces, Liguori, Napoli (1981).

[EH1] Eisenbud, David /Harris, Joe: Limit linear series: basic theory, Invent. Math. 85, 337-371 (1986).

[FK] Farkas, Hershel M. / Kra, Irwin: Riemann Surfaces, Graduate Texts in Math 71, Springer-Verlag, 1980.

[F] Fujita, Takao(藤田隆夫): On Kahler fiber spaces over curves, J. Math. Soc. Japan 30/4, 779-794 (1984).

[Gi] Gieseker, David: Global moduli for surfaces of general type, Inv, Math. 43, 233-282 (1977),

[Gra] Grauert, H.: Mordell's Vermutung uber rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Functionenkörper,Publ. Math. IHES, 1965.

[GH] Griffiths, Phillip / Harris, Joe: Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1978.

[HN] Harder, G. / Narasimhan, M. S.: On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, Math. Annalen 212, 215-248 (1975).

[HM] Harris Joe / Mumford, David: On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, Invent. Math. 67, 23-86 (1982).

[H1] Hartshorne, Robin: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math 52, Springer-Verlag, 1977.

[H2] Hartshorne, Robin: curves with high self-intersection on algebraic surfaces, Publ. IHES 36, 111-125 (1969).

[Ho1] Horikawa, Eiji (堀川穎二): On deformations of quintic surfaces, Invent. Math, 31, 43-85 (1975).

[Ho2] Horikawa, E.: On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, in Complex Analysis and Algebraic Geometry, 79-90, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ho3] Horikawa, E.: Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, I: Annals of Math. 104, 357-387 (1976); II: Inv. Math. 37, 121-155 (1976); III: Inv. Math. 47, 209-248 (1978); IV: Inv. Math. 50, 103-128 (1979); V: J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 1A, Math. 28/3, 745-755 (1981),

[Ii] Iitaka, Shigeru (飯高茂): Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 76, Springer-Verlag, 1982,

[In] Inoue, Masahisa: Some surfaces of general type with positive indices, preprint 1981,

[Ko1] Kodaira, K. (小平邦彦): On compact complex analytic surfaces, I: Ann. Math. 71, 111-152 (1960); II: Ann. Math. 77, 563-626 (1963); III: Ann. Math. 78, 1-40 (1963).

[Ko2] Kodaira, K.: On the structure of compact complex analytic surfaces. I: Am. J. Math. 86, 751-798 (1964); II: Am. J. Math. 88, 682-721 (1966); III: Am. J. Math. 90, 55-83 (1969); IV: ibid. 1048-1066.

[Ko3] Kodaira, K.: A certain type of irregular algebraic surfaces, J Anal. Math. 19, 207-215 (1967).

[La] Lamotke, K.: Die Homologie isolierter Singularitäten; Math. Z. 143; 27-44 (1975).

[Lang] Lang, Serge: Abelian Varieties, Springer-Verlag, 1983,

[Le] Lefschetz, S.: L' Analyse Situs et la Géométrie Algébrique, Gauthier-Villars 1924.

[Liv] Livné, R. A.: On certain covers of the universal elliptic curve, Ph. D. Thesis, Harvard Univ. 1981.

[Maa] Maass, H.: Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series, Lecture Notes in Math. 216, Springer-Verlag, 1971.

[Man] Mandelbaum, Richard: On the topology of elliptic surfaces, Studies in Algebraic Topology, Advances in Math., Supplementary Studies, Vol 5, 143-166 (1980),

[Manin] Manin, Ju. I.: Rational points of algebraic curves over function fields, Amer. Math. Soc. translations 2/50 189-234 (1966).

[Mat] Matsusaka, Shigeru: Some numerical invariants of hyperelliptic fibrations, J. Math. Kyoto Univ. 30/1, 33-57 (1990).

[Mi1] Miyaoka, Yoichi(宫冈洋一): Tricanonical maps of numerical Godeaux surfaces, Invent. Math. 34, 99-111 (1976).

[Mi2] Miyaoka, Yoichi: On the Chern numbers of surfaces of general type, Invent. Math. 42, 225-237 (1977).

[Mo1] Moishezon, Boris: Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes, Lecture Notes in Math. 603, Springer-Verlag, 1977.

[Mo2] Moishezon, Boris: Algebraic surfaces and the arithmetic of braids, I: in "Arithmetic and Geometry, papers dedicated to I. R. Shafarevich", 199-269, Birkhauser 1983. II: in "Combinatorial Methods in Topology and Algebraic Geometry", Contemporary Math. 44, 311-349 (1985).

[MT] Moishezon, Boris/Teicher, Mina: Simply-connected algebraic surfaces with positive index, Invent. Math. 89, 601-643 (1987).

[Mu1] Mumford, David: Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, 1965.

[Mu2] Mumford, David: Pathologies III, Am. J. Math. 89, 94-104 (1967).

[Mu3] Mumford, David: Abelian Varieties, Oxford Univ. Press, 1970, 1974.

[Mu4] Mumford, David: Stability of projective varieties, l'Enseignement Math. 23, 39-110 (1977).

[N] Namikawa, Yukihiko: Studies on degeneration, in Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds, Lecture Notes in Math. 412, 165-210 (1974).

[NU] Namikawa, Y. / Ueno, Kenji(上野健尔): The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two, Manuscripta Math. 9, 143-186 (1973).

[O] Ogg, A.P.: On pencils of curves of genus two, Topology 5, 355-362 (1966).

[OP] Oort, F. /Peters, C.: A Campedelli surface with torsion group Z/2Z, Indagationes Math. 43, 399-407 (1981).

[OO] Orzech, Grace/Orzech, Morris: Plane Algebraic Curves, Marcel Dekker, 1981.

[Pa] Parshin, A. N.: Algebraic curves over function fields I, Math. SSSR Izv. 2, 1145-1170 (1968).

[P1] Persson, Ulf: Double coverings and surfaces of general type, in

Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. 687, 168-195 (1978).

[P2] Persson, Ulf: A family of genus two fibrations, in Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. 732, 496-502(1979).

[P3] Persson, Ulf: Chern invariants of surfaces of general type, Comp. Math. 43/1, 3-58 (1981).

[P4] Persson, Ulf: An introduction to the geography of surfaces of general type, in Algebraic Geometry Bowdoin 1985 vol. 1, 195-218, AMS, 1987.

[PS] Picard, E. / Simart, G.: Théorie des Fonctions Algébriques de Deux Variables Indépendents I & II, Gauthiers-Villars, 1897 & 1906.

[Pi1] Pirola, Gian Pietro: Curves on generic Kummer varieties, Duke Math. J. 59/3, 701-708 (1989).

[Pi2] Pirola, Gian Pietro: On a conjecture of Xiao, preprint, 1990.

[Ram] Ramanujam, C. P.: Remarks on the Kodaira vanishing theorem J. Indian Math. Soc. 36, 41-51 (1972).

[Re1] Reid, Miles: π_1 for surfaces with small c_1^2, In Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. 732,534-544 (1979).

[Re2] Reid, Miles: Surfaces of small degree, Math. Annalen 275, 71-80 (1986).

[Sa] Sakai, Fumio: Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps, Math. Annalen 254, 89-120 (1980).

[Sha1] Shafarevich, I. R.: Basic Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.

[Shim] Shimura, G. (志村五郎): Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton Univ. Press, 1971.

[Shio] Shioda, Tetsuji: On elliptic modular surfaces, J.Math. Soc. Japan 24/1, 20-59 (1972).

[So] Sommese, A.: On the density of ratios of Chern numbers of algebraic surfaces, Math. Annalen 268, 207-221 (1984).

[Sz] Szpiro, Lucien: Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif, in Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, ed. Lucien Szpiro, Astérisque 86, 44-78 (1981).

[W1] 翁林:«$\chi(O_S)=1$且有亏格二曲线束的一般型曲面»,中国科技大学博士研究生毕业论文(1987).

[W2] 翁林: Some examples of numerical Campedelli surfaces, preprint.

[X1] Xiao, Gang (肖刚): Finitude de l'application bicanonique des surfaces de type général, Bull. Soc. Math. France 113, 23-51 (1985).

[X2] Xiao, Gang: Surfaces Fibrées en Courbes de Genre Deux, Lecture Notes in Math. 1137, Springer-Verlag, 1985.

[X3] Xiao, Gang: An example of hyperelliptic surfaces with positive index,

东北数学 2 (3), 255-257 (1986).

[X4] Xiao, Gang: Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Annalen 276, 449-466 (1987).

[X5] Xiao, Gang: Hyperelliptic surfaces of general type with $K^2 < 4\chi$, Manuscripta Math. 57, 125-148 (1987).

[X6] Xiao, Gang: Irregularity of surfaces with a linear pencil, Duke Math. Journal 55/3, 597-602 (1987).

[X7] Xiao, Gang: Problem list, in Birational Geometry of Algebraic Varieties: Open problems, The XXIIIrd International Symposium of the Taniguchi Foundation, 1988.

[X8] Xiao, Gang: On the stable reduction of pencils of curves, Math. Z. 203, 379-389 (1990).

[X9] Xiao, Gang: π_1 of elliptic and hyperelliptic surfaces, Intern. J. of Math. Z, 599～615(1991).

[Y] Yau, S.-T.(丘成桐): On the Ricci-curvature of a complex Kahler manifold and the complex Monge-Ampère equation, Comment. Pure Appl. Math. 31, 339-411 (1978).

[Z] Zariski, Oscar: Algebraic Surfaces, Springer-Verlag, 1974.

索引及汉英术语对照

（按汉语拼音字母顺序排列）